

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ШУМОВОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С РАЗНЫМ ТИПОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

И.А. Нагаева, доцент

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: nagaevai@gmail.ru

Предложена математическая модель для расчета статистических свойств шумовых лазерных импульсов в среде с кубической нелинейностью и генерацией свободных носителей заряда. Методом Монте – Карло и аналитически выполнен анализ статистических свойств излучения. A mathematical model for computing statistical properties of noise laser pulses in a medium with cubic nonlinearity and generation of free charge carriers is suggested. Statistical properties analysis was executed analytically and by Monte-Carlo method.

Ключевые слова: шумовой импульс, нелинейная среда, статистические свойства, функция корреляции, средний спектр, метод Монте – Карло.

Key words: noise laser pulses, nonlinear medium, statistical properties, correlation function, average spectrum, Monte-Carlo method.

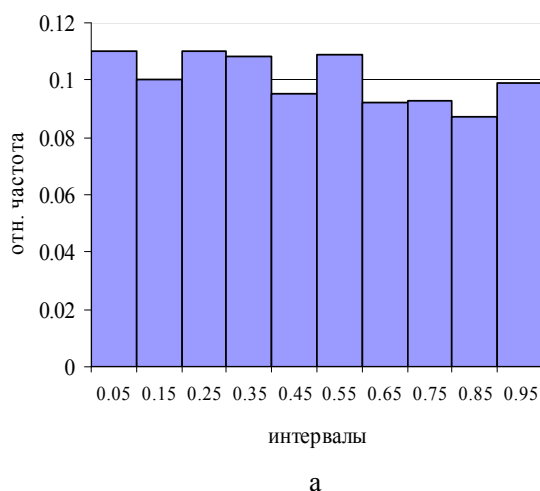
В работах [1, 2] была предложена модель для расчета спектральных и временных характеристик отдельной реализации шумового импульса в среде с кубической нелинейностью. Настоящая работа посвящена анализу статистических характеристик излучения, таких как средний спектр и корреляционная функция.

В качестве модели шумового импульса служил гауссовский шум с гауссовской автокорреляционной функцией:

$$B_0(t_1 - t_2) = \langle \zeta_1(t_1) \zeta_1(t_2) \rangle = \langle \zeta_2(t_1) \zeta_2(t_2) \rangle = 0.5 \exp \left[-\frac{(t_1 - t_2)^2}{\tau_k^2} \right] \quad (1)$$

$$\langle \zeta_1(t_1) \zeta_2(t_2) \rangle = 0,$$

здесь τ_k^2 - время корреляции шума.



Метод формирования нормальных псевдо-случайных чисел с гауссовской автокорреляционной функцией подробно описан в работах [3, 4]. Качество получаемых распределений оценивалось по критерию Пирсона χ^2 [4]. Тестовые расчеты показали, что гипотеза о равномерном распределении моделируемой последовательности подтверждалась с уровнем значимости $\alpha = 0.9-0.95$. Гистограмма этого распределения представлена на рис. 1 а. Гипотеза о гауссовской статистике моделируемого шума подтверждалась с уровнем значимости $\alpha = 0.7-0.8$ рис. 1 б). При этом последовательности $\{\xi_1\}$ и $\{\xi_2\}$ автоматически оказывались взаимно не коррелированными.

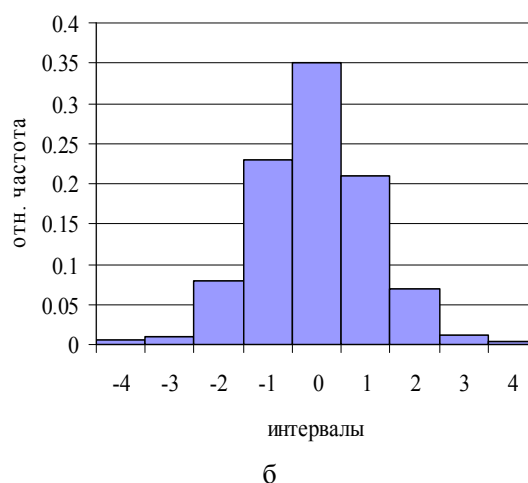


Рис. 1. Гистограммы равномерного (а) и гауссовского распределений (б).

Теоретическая (1) и расчетная (2) автокорреляционные функции для времени

корреляции $\tau_k = 0.23\tau_0$ (рис. 2) практически совпадают на всей области определения.

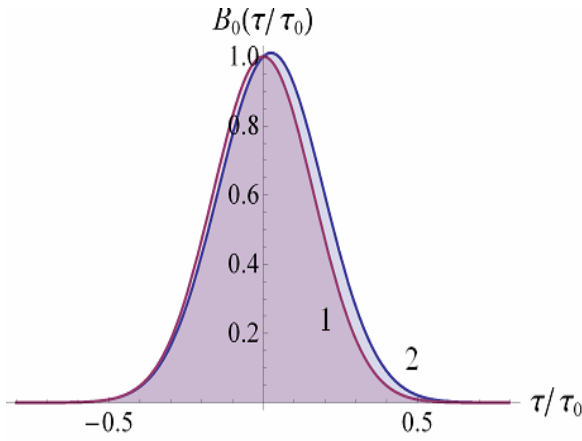


Рис. 2. Автокорреляционная функция шума.

Статистические характеристики шумового импульса в нелинейной среде исследуются методом Монте-Карло, а для случая сред с кубической нелинейностью и аналитически. Среди других методов данный метод выделяется своей простотой и общностью. Идея метода заключается в многократном решении задачи, после чего полученная статистически независимая выборка решений усредняется. Сходимость метода является сходимостью по вероятности. Путем многократного решения уравнения распространения импульса с граничными условиями в виде импульса с шумовым заполнением (и гауссовской формой огибающей) получаем статистически независимую выборку полей $E_i(z = z_{\text{вых}}, t)$ $i=1, N$. Процедура усреднения соответствует измерению средних характеристик по серии импульсов.

Важной характеристикой шумового излучения является его когерентность. Исследуя форму корреляционной функции, можно получить изменение временного масштаба когерентности при самомодуляции излучения.

В вычислительном эксперименте рассчитывалась степень когерентности γ :

$$B(t_1, t_2, z) = \frac{B_0(\tau) \exp(\tau^2)}{\left[1 + 2\varphi_k^2 (1 - B_0^2(\tau)) \exp(\tau^2) - i\varphi_k z (1 - \exp(\tau^2))\right]^2}, \quad (7)$$

где $B_0(\tau)$ автокорреляционная функция стационарного процесса, φ_k – нелинейный набег фазы в среде с кубической нелинейностью.

Сравнивая аналитические зависимости и результаты численного эксперимента, полученному методом Монте-Карло, для 1000 реализаций случайного процесса, можно сказать, что численная модель для расчета корреляционной функции в среде с кубической нелинейностью является вполне достоверной. Наблюдается небольшая асимметрия численного решения, которая обусловлена конечным числом реализаций.

На основании полученного результата для

$$\gamma(0, \tau) = \frac{\langle E(0) \cdot E^*(\tau) \rangle}{\sqrt{\langle I(0) \cdot I(\tau) \rangle}}. \quad (2)$$

Средний спектр определялся через интеграл Фурье от комплексной амплитуды поля:

$$S(\omega) = \left\langle \left| \int E(t) \cdot e^{i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle. \quad (3)$$

Перейдем к анализу усредненного спектра и функции корреляции частично-когерентного излучения. В отсутствие ионизации, для среды с кубической нелинейностью, возможно получить аналитический результат для корреляционной функции [5]. Однако непосредственно воспользоваться результатами работы [5] нельзя, поскольку необходимо обобщение для нестационарного случая. Для сред только с кубической нелинейностью уравнение распространения импульса в безразмерных переменных имеет простой вид:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = R_k |E|^2 E, \quad (4)$$

здесь, R_k – параметр кубической нелинейности, пропорциональный квадрату амплитуды поля на входе в нелинейную среду. В рассматриваемой модели предполагается постоянство интенсивности волны вдоль трассы распространения. Тогда решение можно представить в виде:

$$E(z, t) = E(z_{\text{вх}}, t) \times \exp\left(-1/2 \cdot iR_k |E(z_{\text{вх}}, t)|^2 z\right), \quad (5)$$

здесь $E(z_{\text{вх}}, t)$ – комплексная амплитуда поля на входе в нелинейную среду. Корреляционная функция, соответственно, равна:

$$B(t_1, t_2, z) = \langle E(t_1, z) \cdot E^*(t_2, z) \rangle, \quad (6)$$

знак * означает комплексное сопряжение. После проведения соответствующих выкладок получаем:

корреляционной функции нестационарного процесса (7), можно предложить полуаналитический способ расчета среднего спектра шумового импульса в средах с кубической нелинейностью. Спектральная плотность задается выражением:

$$S(\omega) = \langle E(\omega) \cdot E^*(\omega) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \langle E(t) \cdot E^*(t_1) \rangle \exp[i\omega(t - t_1)] dt dt_1, \quad (8)$$

где величина, стоящая под знаком среднего, есть ничто иное, как уже известная корреляционная функция (7). Интегрирование проводилось методом Симпсона с точностью $\mathcal{E} = 10^{-4}$, а также с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Рассмотрим случай, когда влияние шумовой набивки импульса наиболее ярко выражено, т.е. импульс с достаточно малым временем корреляции $\tau_k/\tau_0 = 0.23$. При усреднении результатов по серии импульсов спектр сглаживается, исчезает его модуляционная структура.

Сначала остановимся на случае только кубической нелинейности. На рис. 3 а приведены спектры, усредненные по ансамблю из 250 реализаций для различных значений нелинейного набег фазы φ_k . Расположение локальных максимумов, возникающих в спектре отдельной реализации, случайным образом меняется от реализации к реализации, поэтому усредненный спектр имеет один

максимум на центральной частоте. В спектральном распределении появляются симметричные крылья, причем с увеличением нелинейного фазового набег их ширина увеличивается. Подобное изменение среднего спектра в кубической среде описывается формулой (8).

Одной из важных характеристик шумового импульса является его когерентность. На рис. 3б представлены корреляционные функции, нормированные на среднюю интенсивность частично-когерентного импульса, на входе в нелинейную среду (кривая 1) и после распространения в среде с кубической нелинейностью (кривая 2). В нелинейной среде происходит значительное уменьшение времени когерентности. Так при нелинейном фазовом набеге $\varphi_k = 6.4$ оно уменьшается примерно в три раза. Подобный результат получается и для случая аналитического решения (7). Это явление можно объяснить, исходя из того, что нелинейность приводит к сильному обогащению спектра.

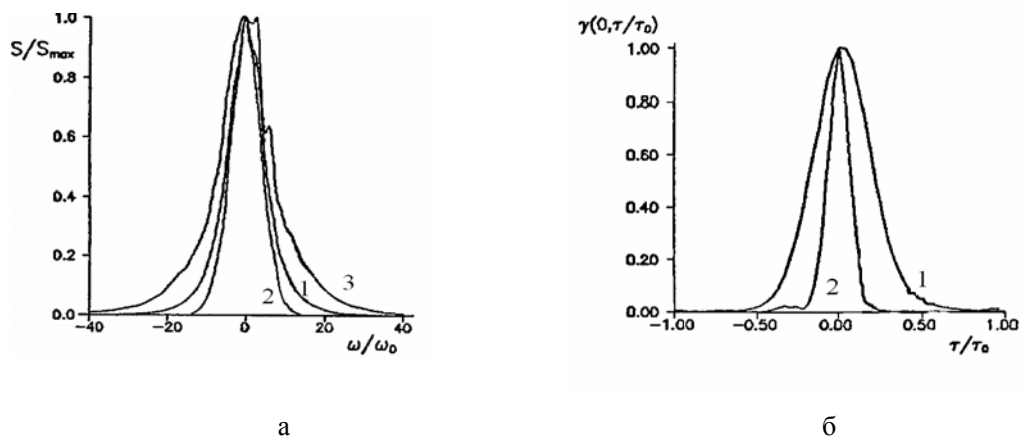


Рис. 3. Нормированный спектр (а) и функции корреляции (б), усредненные по ансамблю из 250 реализаций частично-когерентного импульса, на выходе из нелинейной среды $\tau_k/\tau_0 = 0.23$;

$\varphi_k = 0$ (1), $\varphi_k = 6.4$ (2) $\varphi_k = 3.2$ (3).

Рассмотрим далее распространение шумового импульса в среде с ионизационной нелинейностью. Усредненный спектр шумового импульса, распространяющегося в условиях многофотонной ионизации, представлен на рис. 4 а. Как и в случае отдельной реализации, усредненный спектр имеет асимметричный вид со сдвигом в область больших частот. Такая форма спектра объясняется тем, что время действия импульса происходит накопление свободных носителей заряда, которые и увеличивают нелинейный ионизационный фазовый набег.

Корреляционная функция при распространении шумового импульса в условиях много-

фотонной ионизации представлена на рис. 4б (кривая 2). Характерный вид корреляционной функции – это узкий «пичок» в ее центральной части на фоне достаточно широкого пьедестала. Так, в среде с ионизационным типом нелинейности появляются два масштаба корреляции поля. Причем, оба эти масштаба меньше начального времени корреляции в линейной среде.

Таким образом, анализируя форму корреляционной функции или, что сделать проще, форму усредненного спектра импульса можно судить о наличии в среде свободных носителей заряда, а также о том, какой механизм нелинейности преобладает.

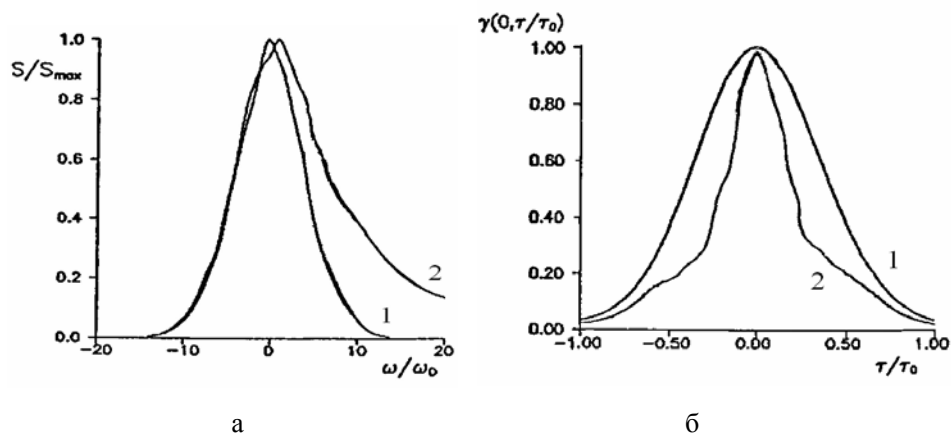


Рис. 4. Нормированный спектр (а) и функции корреляции (б), усредненные по ансамблю из 250 реализаций частично-когерентного импульса, на выходе из нелинейной среды $\tau_k/\tau_0=0.23$; $\varphi_{in}=0$ (1), $\varphi_{in}=6.7$ (2).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нагаева, И. А. Спектральные и временные характеристики частично-когерентного излучения в нелинейной среде / И. А. Нагаева // Математические методы и приложения. – М., 2004. – С. 107–113.
2. Косарева, О. Г. Изменение спектра субпикосекундного импульса в однородной среде с кубической нелинейностью в условиях многофотонной ионизации / О. Г. Косарева, С. А. Шлёнов // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1992. – Т. 56, № 9. – С. 56–62.
3. Миркин, Л. И. Метод генерирования коррелированных гауссовских псевдослучайных чисел на ЭВМ / Л. И. Миркин, М. А. Рабинович, Л. И. Ярославский // Журн. вычисл. математики и математ. физики. – 1972. – Т. 18, № 5. – С. 1353–1355.
4. Ермаков, С. М. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М. : Наука, 1982. – 295 с.
5. Ахманов, С. А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. – М. : Наука, 1981. – 640 с.