

УДК 536.2.01.24.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой, Т.В. Тимченко, старший преподаватель
кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: timchenkovt@yandex.ru

В

статье развиты новые представления о краевых задачах переноса для уравнений гиперболического типа: развит метод функций Грина; описан новый эффект влияния теплоизолированной движущейся границы на термонапряженное состояние массивного тела.

A new representation of boundary-value problems for transfer equations of hyperbolic type is suggested: the method of Green's functions was developed. A new effect of heat-insulated moving boundary on the thermo-stressed state of a massive body is described.

Ключевые слова: уравнения гиперболического типа, краевые задачи, термоизолированная движущаяся граница, термические напряжения.

Key words: equations of hyperbolic type, boundary-value problem, heat-insulated moving boundary, thermal stresses.

Рассмотрим модельные представления сравнительно нового класса, имеющие многочисленные приложения в различных областях науки и техники [1].

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x_1, x_2, x_3)$, S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D , $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S , $\Omega = \{M \in D, t > 0\}$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) с основанием D при $t=0$, $U(M, t)$, $T(M, t)$ – функции, подлежащие нахождению из условий:

$$a_1^2 \Delta U(M, t) + 2a_2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U(M, t)}{\partial x_i \partial t} - \frac{\partial^2 U(M, t)}{\partial t^2} =$$

$$= a_3 \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2}, (M, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$U(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), M \in \bar{D}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U(M, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi_1(M), M \in \bar{D}, \quad (3)$$

$$U(M, t) = \Psi(M, t), M \in S, t \geq 0, \quad (4)$$

где функция $T(M, t)$ есть решение задачи.

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \Theta(M, t), (M, t) \in \Omega, \quad (5)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = F_0(M), M \in \bar{D}, \quad (6)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \beta_3 \varphi(M, t), \quad (7)$$

$$M \in S, t \geq 0.$$

При этом необходимо должны быть выполнены условия гладкости:

$$\Phi_0(M) \in C^0(\bar{D}); \quad \Phi_1(M) \in C^0(\bar{D});$$

$$F_0(M) \in C^1(\bar{D}); \quad \Theta(M, t) \in C^0(\Omega); \quad \Psi(M, t) \text{ и}$$

$$\varphi(M, t) \text{ кусочно-непрерывны на } S \times t \geq 0; \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0; a, a_i, \beta_i - \text{const } (i = 1, 2, 3).$$

Выполнение начальных условий (2), (3), (6) для $\forall M \in \bar{D}$ и граничных (4), (7) для $\forall t \geq 0$ предполагает наличие условий согласованности

$$\Phi_0(M) = \Psi(M, 0), M \in S;$$

$$\Phi_1(M) = \left. \frac{d\Psi(M, t)}{dt} \right|_{t=0}, M \in S;$$

$$\beta_1 \frac{\partial F_0(M)}{\partial n} + \beta_2 F_0(M) = \beta_3 \varphi(M, 0), M \in S.$$

При этом искомые решения $U(M, t)$ и $T(M, t)$ достаточно гладки вплоть до границы $\bar{D}$:

$$U(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega});$$

$$T(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega});$$

$$\text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}); \quad \bar{\Omega} = (M \in \bar{D}, t \geq 0).$$

В силу принципа суперпозиции, справедливого для линейных задач переноса (5)-(7), можно записать интегральное представление для $T(M, t)$ в виде [1]:

$$T(M, t) = \int_D F_0(P) G(M, t, P, \tau) \Big|_{\tau=0} dV_P +$$

$$+ a \int_0^t \int_S \left(G(M, t - \tau, P) \frac{\partial T(P, \tau)}{\partial n_P} - \right.$$

$$\left. - T(P, \tau) \frac{\partial G(M, t - \tau, P)}{\partial n_P} \right) d\tau d\sigma_P +$$

$$+ \int_0^t \int_D \Theta(P, \tau) G(M, t, P, \tau) d\tau dV_P, \quad (8)$$

если известна соответствующая функция Грина

$G(M, t, P, \tau) = G(M, t - \tau, P)$ для данной области, как решение более простой задачи для одно-родного уравнения (5) с однородными граничными условиями того же вида, что и (7):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \Delta G(M, t, P, \tau), \quad M \in D, \quad t > \tau, \quad (9)$$

$$G(M, t, P, \tau)|_{t=\tau} = \delta(M, P), \quad (M, P) \in D, \quad (10)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial G}{\partial n} + \beta_2 G \right)_{M \in S} = 0, \quad t > \tau. \quad (11)$$

Здесь $\delta(M, P)$ – дельта-функция Дирака, $P = P(x'_1, x'_2, x'_3)$. Методы построения функций Грина, как решение задачи (9)-(11) для широкого класса областей D , изложены в [1, 2].

Получим далее аналогичное интегральное представление аналитических решений для случая (1)-(4) и в качестве иллюстрации развитого подхода рассмотрим ряд проблем в нецилиндрической области $x > l + vt$, $t > 0$, имеющих обширные практические приложения [2].

Используя [3], можно показать, что функция Грина $G(M, t, P, \tau) = G(M, t - \tau, P)$ для гиперболического уравнения (1) с условиями (2)-(4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[U(P, \tau) \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial \tau} - G(M, t, P, \tau) \frac{\partial U(P, \tau)}{\partial \tau} \right] &= \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) = \\ &= a_1^2 (U \Delta_P G - G \Delta_P U) + 2a_2 \left(U \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \tau} - G \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial \tau} \right) + GW, \end{aligned} \quad (20)$$

где $W(P, \tau) = a_3 \frac{\partial^2 T(P, \tau)}{\partial \tau^2}$. Проинтегрируем (20) по $P(x'_1, x'_2, x'_3) \in D$, используя справа формулу Грина для оператора Лапласа [2] и учитывая граничное условие для G (19):

$$\begin{aligned} \int_D \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) dV_P &= a_1^2 \int_S U \frac{\partial G}{\partial n_P} d\sigma_P + \\ &+ 2a_2 \int_D \left(U \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \tau} - G \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial \tau} \right) dV_P + \\ &+ \int_D W(P, \tau) G(M, t, P, \tau) dV_P. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношение (21) справедливо при всех $\tau < t$ и, следовательно, его можно проинтегрировать по τ для $0 < \tau < t - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число (при $0 < \tau < t - \varepsilon$, подынтегральные функции в (21) достаточно регулярны, так как исключена особенность у функции G в точке $P = M$ при $\tau = t$). Получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_D \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) dV_P &= \\ &= a_1^2 \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_S U \frac{\partial G}{\partial n_P} d\sigma_P + \end{aligned}$$

по переменным (M, t) является решением задачи

$$a_1^2 \Delta_M G + 2a_2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0, \quad M \in D, \quad (12)$$

$$t > \tau, \quad (13)$$

$$G(M, t, P, \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad (M, P) \in D, \quad (13)$$

$$\frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = \delta(M, P), \quad (M, P) \in D, \quad (14)$$

$$G(M, t, P, \tau)|_{M \in S} = 0, \quad t > \tau, \quad (15)$$

а по переменным (P, τ)

$$a_1^2 \Delta_P G + 2a_2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \tau} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = 0, \quad P \in D, \quad (16)$$

$$\tau < t, \quad (17)$$

$$G(M, t, P, \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad (P, M) \in D, \quad (17)$$

$$\frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{t=\tau} = -\delta(P, M), \quad (P, M) \in D, \quad (18)$$

$$G(M, t, P, \tau)|_{P \in S} = 0, \quad \tau < t. \quad (19)$$

Соотношения (12)-(19) имеют важное значение для дальнейших рассуждений.

Рассмотрим равенство:

$$\begin{aligned} &+ 2a_2 \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_D \left(U \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \tau} - G \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial \tau} \right) dV_P + \\ &+ \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_D W(P, \tau) G(M, t, P, \tau) dV_P \end{aligned}$$

Рассмотрим в (22) интегралы:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_D \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right) dV_P = \\ &= \int_D \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)_{\tau=t-\varepsilon} dV_P - \\ &- \int_D \left(U \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - G \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)_{\tau=0} dV_P. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_1 = - \int_D U(P, t) \delta(P, M) dV_P -$$

$$- \int_D \left(U \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} dV_P =$$

$$= -U(M, t) - \int_D \left(U \frac{\partial G}{\partial \tau} - G \frac{\partial U}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} dV_P.$$

$$(22) \quad J_2 = 2a_2 \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_D \left(U \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \tau} - G \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial \tau} \right) dV_P. \quad (24)$$

Интегрируя (24) по частям (по τ), используя при этом формулу Остроградского-

Грина [4] и граничные условия (19), находим при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_2 = -a_2 \int_D \left(U \sum_{i=1}^3 \frac{\partial G}{\partial x_i'} - G \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i'} \right)_{\tau=0} dV_p. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} U(M, t) = & - \int_D \left[U(P, \tau) \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial \tau} - G(M, t, P, \tau) \frac{\partial U(P, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} dV_p + \\ & + a_2 \int_D \left[U(P, \tau) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial x_i'} - G(M, t, P, \tau) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U(P, \tau)}{\partial x_i'} \right]_{\tau=0} dV_p - \\ & - a_1^2 \int_0^t d\tau \int_S U(P, \tau) \frac{\partial G(M, t - \tau, P)}{\partial n_p} d\sigma_p - \int_0^t \int_D W(P, \tau) G(M, t - \tau, P) d\tau dV_p. \end{aligned} \quad (26)$$

В качестве приложения развитой теории рассмотрим некоторые практические задачи теории теплового удара [2].

Пусть $\overline{\Omega}_t = (x \geq l + vt, t \geq 0; l, v - \text{const})$ – нецилиндрическая область, $T(x, t)$ – температура в Ω_t , $\sigma(x, t) = \sigma_{xx}(x, t)$ – температурные напряжения в Ω_t , функции $\sigma(x, t)$ и $T(x, t)$ удовлетворяют условиям задачи:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, (x, t) \in \Omega_t, \quad (27)$$

$$\sigma(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \geq l; \quad (28)$$

$$\sigma(x, t)|_{x=l+vt} = \sigma(x, t)|_{x=\infty} = 0, \quad t \geq 0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > l + vt, \quad t > 0; \quad (30)$$

$$T(x, t)|_{t=0} = T_0, \quad x \geq l; \quad (31)$$

$$\left[\beta_1 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \beta_2 T(x, t) \right]_{x=l+vt} = \beta_3 \varphi(t), \quad t > 0, \quad (32)$$

$$|T(x, t)| < +\infty, \quad x \geq l + vt, \quad t \geq 0. \quad (33)$$

Предполагаем, что в (32) могут быть реализованы режимы нагрева: $\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1$ – температурный нагрев; $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = -1$ – тепловой нагрев; $\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = -h$ – нагрев средой (h – относительный коэффициент теплообмена). В (27)-(33) все параметры постоянные величины: $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость звука в материале, (λ, μ) – изотермические коэффициенты Ламе, ρ – плотность; ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного теплового расширения. В безразмерных переменных [2] (как это принято в приложениях)

$$\begin{aligned} x' &= x/l; \quad Fo = at/l^2; \quad Pe = vl/a; \\ S_0 &= \alpha_T (3\lambda + 2\mu); \quad \alpha_0 = v_p l/a; \end{aligned}$$

Соотношения (23)-(25), а также оставшиеся в (22) интегралы при $\varepsilon \rightarrow 0$ дают следующее (искомое) интегральное представление аналитических решений краевых задач для уравнения (1) через функцию Грина $G(M, t, P, \tau)$:

$$\begin{aligned} T(x', Fo) &= [T(x, t) - T_0] / T_0; \\ \sigma(x', Fo) &= \sigma(x, t) / (S_0 T_0) \end{aligned}$$

и в подвижной системе координат $\xi = x' - (1 + PeFo)$ при $\sigma(\xi, Fo) \equiv \sigma(x', Fo)$, $A(\xi, Fo) \equiv T(x', Fo)$ задача (27)-(29) сводится к случаю (1)-(4):

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 - Pe^2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} + 2Pe \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial Fo} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial Fo^2} = \\ = F(\xi, Fo), \quad \xi > 0, Fo > 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sigma(\xi, Fo) \Big|_{Fo=0} = \left(\partial \sigma / \partial Fo \right)_{Fo=0} = 0, \quad \xi \geq 0; \quad (35)$$

$$\sigma(\xi, Fo) \Big|_{\xi=0} = \sigma(\xi, Fo) \Big|_{\xi=\infty} = 0, \quad Fo \geq 0. \quad (36)$$

здесь $\alpha_0^2 - Pe^2 > 0, (\alpha_0 > Pe[2])$;

$$\begin{aligned} F(\xi, Fo) = & \frac{\partial}{\partial Fo} \left(\frac{\partial A}{\partial Fo} + Pe^2 A \right) - \\ & - 2Pe \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial A}{\partial Fo} + \left(Pe^2 / 2 \right) A \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Функция $A(\xi, Fo)$, как решение преобразованной задачи (30)-(33) в системе координат (ξ, Fo) в пространстве изображений

по Лапласу $\int_0^\infty \dots \exp(-pFo) dFo$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\xi, P) = \\ = \frac{\bar{\varphi}(P)}{\bar{\Theta}(P)} \exp \left[- \left(Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4} \right) \xi \right], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\bar{\Theta}(P) = \begin{cases} 1 & \text{— температурный нагрев;} \\ Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4} & \text{— тепловой нагрев;} \\ Bi + Pe/2 + \sqrt{p + Pe^2/4} & \text{нагрев средой,} \\ Bi & \end{cases} \quad (39)$$

$Bi = hl, \bar{\varphi}(P)$ – изображение граничной функции $\varphi(Fo)$.

Интегральное соотношение (26) для случая (34)-(36) имеет вид:

$$\sigma(\xi, Fo) = - \int_0^{Fo} \int_0^\infty F(\xi', \tau) G(\xi, Fo, \xi', \tau) d\tau d\xi'. \quad (40)$$

Функция Грина $G(\xi, Fo, \xi', \tau)$ является решением задачи:

$$(\alpha_0^2 - Pe^2) \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + 2Pe \frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial Fo} - \frac{\partial^2 G}{\partial Fo^2} = 0, \quad (41)$$

$$\bar{\sigma}(\xi, p) = - \int_0^\infty \left[p(p + Pe^2) \bar{A}(\xi', p) - 2Pe \left(p + Pe^2/2 \right) \frac{d\bar{A}(\xi, p)}{d\xi} \right] \bar{G}(\xi, p, \xi') d\xi'. \quad (44)$$

Функция Грина $G(\xi, Fo - \tau, \xi')$, как решение задачи (41)-(43) в пространстве изображений по Лапласу (по $Fo^* = Fo - \tau$), имеет вид:

$$\bar{G}(\xi, p, \xi') = \frac{1}{2\alpha_0 p} \left\{ \exp[k_2(\xi - \xi')] - \exp(k_2\xi - k_1\xi') \right\}, \quad 0 < \xi' < \xi; \quad (45)$$

$$\bar{G}(\xi, p, \xi') = \frac{1}{2\alpha_0 p} \left\{ \exp[-k_1(\xi' - \xi)] - \exp(k_2\xi - k_1\xi') \right\}, \quad 0 < \xi < \xi'; \quad (46)$$

где $k_1 = \frac{p}{\alpha_0 + Pe}$; $k_2 = -\frac{p}{\alpha_0 - Pe}$.

Интегральное соотношение (44) и выражения (37), (45)-(46) дают следующее базовое операционное решение задачи (27)-(33) (в системе координат (ξ, Fo)):

$$\bar{\sigma}(\xi, p) = \frac{\bar{\varphi}(P)}{\alpha_0^2 - Pe^2} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{Pe}{2} + \sqrt{p + Pe^2/4} \right) \xi \right] - \exp \left[- \frac{\xi}{(\alpha_0 - Pe)} p \right] \right\} \frac{\bar{\Phi}(p)}{\bar{\Theta}(p)}, \quad (47)$$

где

$$\bar{\Phi}(p) = \frac{p(p + Pe^2) + 2Pe \left(p + Pe^2/2 \right) \left(\frac{Pe}{2} + \sqrt{p + Pe^2/4} \right)}{\left[\frac{Pe}{2} - \frac{p}{(\alpha_0 - Pe)} + \sqrt{p + Pe^2/4} \right] \left[\frac{Pe}{2} + \frac{p}{(\alpha_0 + Pe)} + \sqrt{p + Pe^2/4} \right]}, \quad (48)$$

а $\bar{\Theta}(p)$ указано в (39) для всех случаев теплового воздействия. Оригиналы в (47) находятся по таблицам и теоремам операционного исчисления, и, в данном случае, не выписываются вследствие громоздкости выражений.

В качестве следующего приложения полученных соотношений рассмотрим эффект влияния движущейся термоизолированной границы на термонапряженное состояние области Ω_t в (27). Сформулируем для этого случая граничное условие, которое (по-видимому) является новым в математической физике, отличным от классического условия теплоизоляции

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \bigg|_{M \in S} = 0, \quad t > 0 \quad (49)$$

для цилиндрической области $\bar{\Omega} = (M \in \bar{D} = D + S, t \geq 0)$ [4]. Действительно, пусть урав-

$\xi > 0, Fo > \tau$,

$$G|_{Fo=\tau} = 0, \xi > 0, \frac{\partial G}{\partial Fo} \bigg|_{Fo=\tau} = \delta(\xi - \xi'), \xi > 0; \quad (42)$$

$$G|_{\xi=0} = G|_{\xi=\infty} = 0, Fo > \tau. \quad (43)$$

Отсюда следует, что $G(\xi, Fo, \xi', \tau) = G(\xi, Fo - \tau, \xi')$, и в пространстве изображений по Лапласу соотношение (40) с учетом (37) запишется в виде:

нение (30) с начальным условием (31) задано в области, $x \in (y(t), \infty), t > 0$, и движущаяся граница $x = y(t)$ предполагается термоизолированной. Для этого случая уравнение теплового баланса имеет вид

$$c\rho \int_{y(t)}^\infty T(x, t) dx = const, \quad t > 0. \quad (50)$$

Дифференцируя обе части по t и используя (30) после несложных преобразований приходим к соотношению

$$\left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{v(t)}{a} T(x, t) \right]_{x=y(t)} = 0, \quad t > 0, \quad (51)$$

означающему условие теплоизоляции движущейся границы. В случае равенства нулю скорости движения границы $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ условие (51) совпадает с классическим (49) для одномерного случая. Для области Ω_i в (30) при $v(t) = v = \text{const}$ условие (51) имеет вид [1, 5]:

$$\left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{v}{a} T(x, t) \right]_{x=l+vt} = 0, \quad t > 0$$

или в системе координат (ξ, Fo)

$$\left. \frac{\partial A(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -Pe \left[A(\xi, Fo) \Big|_{\xi=0} + 1 \right], \quad (52)$$

$$Fo > 0$$

и, таким образом, из постановки (30), (31), (52), (33) вытекает следующий эффект: несмотря на отсутствие внешних (на границе) и внутренних (в области) источников тепла, движущаяся термоизолированная граница приводит к появлению в Ω_i температурного градиента, а значит и к соответствующим температурным напряжениям. Действительно, в системе координат (ξ, Fo) в пространстве изображений по Лапласу решение задачи (30), (31), (33), (52) имеет вид (38), где

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{Pe}{p}, \quad \bar{\Theta}(p) = \sqrt{p + Pe^2/4} - Pe/2, \quad (53)$$

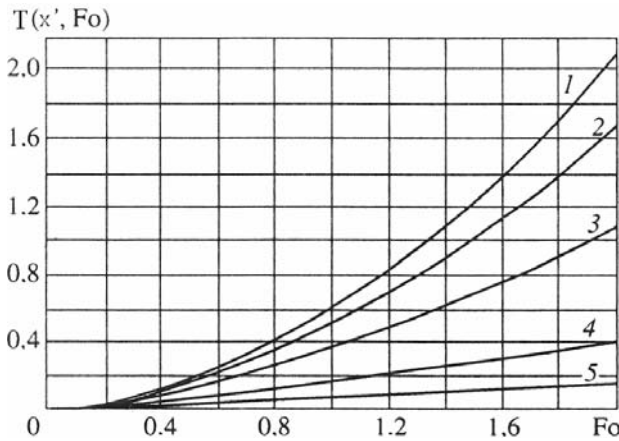


Рис. 1. Зависимость температурной функции $T(x', Fo)$ от безразмерного времени Fo при условии теплоизоляции на равномерно движущейся границе в сечении $x' = 2$ для различных Pe : 1 - $Pe = 0.16$; 2 - 0.3; 3 - 0.5; 4 - 0.6; 5 - 0.65.

На рис. 1 и рис. 2 представлены кривые температуры в разных сечениях.

$$\sigma_{x'x'}^{(1)}(x', Fo) = \beta_1 \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \exp \left[-\frac{(x' - 1)^2}{4Fo} \right] + \frac{1}{2} [\beta_2 - \beta_1(x' - 1 - 2PeFo)] \exp [-Pe(x' - \quad (55)$$

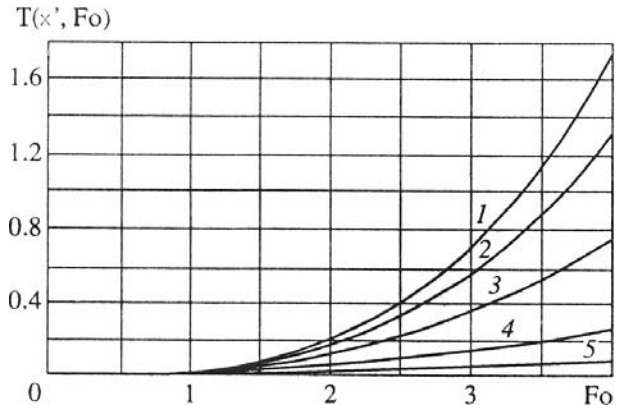


Рис. 2. Зависимость температурной функции $T(x', Fo)$ от безразмерного времени Fo при условии теплоизоляции на равномерно движущейся границе в сечении $x' = 4$ для различных Pe : 1 - $Pe = 0.16$; 2 - 0.3; 3 - 0.5; 4 - 0.6; 5 - 0.65.

Функция $\bar{\sigma}(\xi, p)$ имеет вид (47)-(48), где $\bar{\varphi}(p)$ и $\bar{\Theta}(p)$ - соотношения (53). Рассмотрим этот случай более подробно, как практически новый в термомеханике. Согласно функциональной конструкции (47) и с учетом движения границы, термоупругие напряжения $\sigma_{x'x'}(x', Fo)$ в системе координат (x', Fo) имеют вид:

$$\sigma(x', Fo) = \sigma_{x'x'}(x', Fo) = \sigma_{x'x'}^{(1)}(x', Fo) - \begin{cases} 0, & 0 < Fo < \frac{x' - 1}{\alpha_0} \\ \sigma_{x'x'}^{(2)}(x', Fo), & \frac{x' - 1}{\alpha_0} < Fo < \frac{x' - 1}{Pe} \end{cases} \quad (54)$$

где составляющая напряжения $\sigma_{x'x'}^{(1)}(x', Fo)$ представляет собой диффузионную волну, возникающую сразу в каждой внутренней точке области; а составляющая напряжения $\sigma_{x'x'}^{(2)}(x', Fo)$ представляет собой продольную упругую волну, фронт которой движется со скоростью α_0 внутрь области, и в момент времени $Fo = \frac{(x' - 1)}{\alpha_0}$ (в фиксированном сечении x') имеет место скачок напряжений (из области сжимающих в область растягивающих при нагревании и, наоборот, при резком охлаждении).

Составляющие напряжения $\sigma_{x'x'}^{(1)}(x', Fo)$ и $\sigma_{x'x'}^{(2)}(x', Fo)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
& -1 - PeFo) \Phi^* \left(\frac{x' - 1 - 2PeFo}{2\sqrt{Fo}} \right) + \beta_3 \exp[\alpha_0(x' - 1 + \alpha_0 Fo)] \Phi^* \left(\frac{x' - 1 + 2\alpha_0 Fo}{2\sqrt{Fo}} \right) + \\
& + \beta_4 \exp[-Pe(x' - 1 - \alpha_0 Fo)] \Phi^* \left(\frac{x' - 1 - 2\alpha_0 Fo}{2\sqrt{Fo}} \right); \\
& \sigma_{x',x'}^{(2)}(x', Fo) = \beta_1 \alpha_1 \sqrt{\frac{Fo - t_0}{\pi}} \exp \left[-\frac{Pe^2 \alpha_1^2 (Fo - t_0)}{4} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[\beta_2 + \beta_1 Pe \alpha_1 \sqrt{Fo - t_0} \right] \Phi^* \left(-\frac{Pe \alpha_1 \sqrt{Fo - t_0}}{2} \right) + \beta_3 \exp[\alpha_0(\alpha_0 + Pe) \alpha_1^2 (Fo - t_0)] \times \\
& \times \Phi^* \left(\frac{(2\alpha_0 + Pe) \alpha_1 \sqrt{Fo - t_0}}{2} \right) + \beta_4 \exp[\alpha_0(\alpha_0 - Pe) \alpha_1^2 (Fo - t_0)] \times \\
& \times \Phi^* \left(\frac{(Pe - 2\alpha_0) \alpha_1 \sqrt{Fo - t_0}}{2} \right), \tag{56}
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$t_0 = (x' - 1) / \alpha_0 \text{ и } \alpha_1 = \sqrt{\alpha_0 / (\alpha_0 - Pe)},$$

$$\text{а также } \beta_1 = \frac{Pe^3}{\alpha_0^2 - Pe^2}; \quad \beta_2 = \frac{Pe^2(3\alpha_0^2 - Pe^2)}{(\alpha_0^2 - Pe^2)^2},$$

$$\beta_3 = \frac{Pe(Pe + 2\alpha_0)}{4(\alpha_0 + Pe)^2}; \quad \beta_4 = \frac{Pe(Pe - 2\alpha_0)}{4(\alpha_0 - Pe)^2}.$$

Дальнейшее изучение термонапряженного состояния было проведено с помощью вычислительного эксперимента, что позволило обработать большой объем графического материала, выявить ряд закономерностей в поведении термоупругих напряжений, установить влияние различных факторов на характер их изменения. Некоторые из исследованных кривых приведены на рис. 3 и рис. 4.

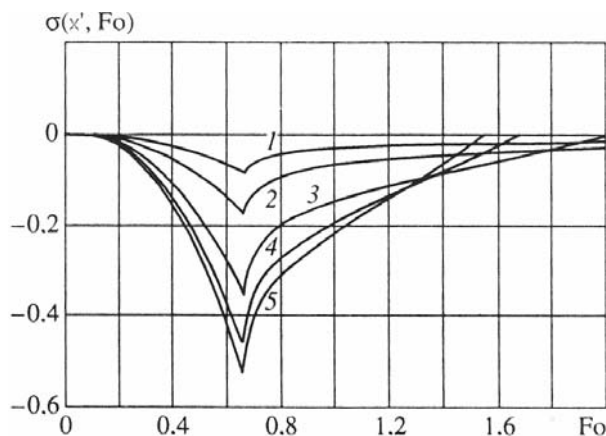


Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma(x', Fo)$ в зависимости от безразмерного времени Fo при условии теплоизоляции на равномерно движущейся границе в сечении $x' = 2$, при $\alpha_0 = 1.5$ для различных Pe : 1- $Pe = 0.16$; 2- 0.3 ; 3- 0.5 ; 4- 0.6 ; 5- 0.65 .

Из рис.3, 4 видно, что с начального момента времени в данном сечении $x' = const$ возникает

сжимающее напряжение, растущее по величине с течением времени. К моменту прихода к рассматриваемому сечению продольной упругой волны, начавшей свое движение от движущейся границы вглубь области, сжимающее напряжение достигает максимального значения, затем резко убывает, стремясь к нулю.

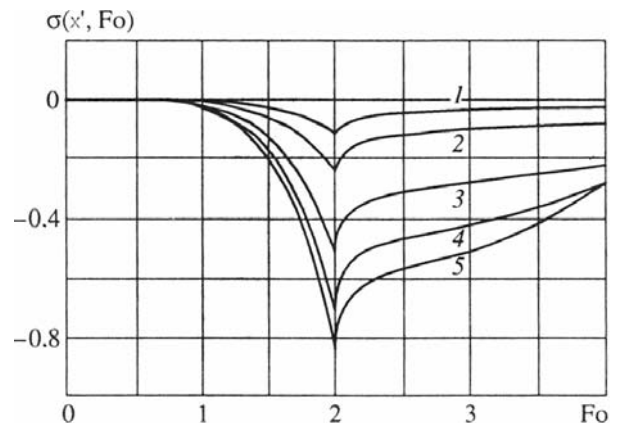


Рис. 4. Распределение напряжений $\sigma(x', Fo)$ в зависимости от безразмерного времени Fo при условии теплоизоляции на равномерно движущейся границе в сечении $x' = 4$, при $\alpha_0 = 1.5$ для различных Pe : 1- $Pe = 0.16$; 2- 0.3 ; 3- 0.5 ; 4- 0.6 ; 5- 0.65 .

Заметим, что согласно (31), время Fo ограничено пределами, вытекающими как из самой конструкции решения, так из наличия движущейся границы. Напряжение $\sigma_{x',x'}(x', Fo)$ в фиксированном сечении стремится к нулю по мере приближения к этому сечению движущейся границы. Именно в этом проявляется особенность изучаемых динамических задач теории теплового удара в областях с движущимися границами.

Таким образом, наличие движущейся теплоизолированной границы приводит к появлению

значительных термических напряжений, несмотря на отсутствие внешних или внутренних источников тепла, создающих градиент температуры.

Соотношения (47)-(48) имеют многочисленные практические приложения, включая в себя различные задания граничной функции $\varphi(Fo)$: постоянная; импульсная; пульсирующая; периодическая; аperiodическая и т.д. Оригиналы для (47) при известном изображении $\bar{\varphi}(p)$ находятся по известным формулам операционного исчисления. При $a_2 = 0$ в (1) выражение (26) дает интегральное представление аналитических решений для волновых

уравнений при общем виде краевых функций в (2)-(4). Преимущество подхода (26) по сравнению с известными для уравнений гиперболического типа (метод Римана и др.) очевидно, если учесть, что нахождение функции Грина $G(M, t, P, \tau)$ методами, развитыми в [2], не составляет труда. Что касается иллюстративной задачи (27)-(33), сводящейся к (1)-(4), то ее решение другими подходами технически затруднительно, если учесть, что в (27)-(33) Ω_t – нецилиндрическая область, для которой классические методы математической физики не позволяют совместить решение уравнения (27) с движением границы области.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами / Э. М. Карташов // Инж. физич. журн. – 2001. – Т. 74, № 2. – С. 171–195.
2. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высш. Школа, 2001. – 550 с.
3. Карташов, Э. М. Новые интегральные соотношения для гиперболических моделей переноса / Э. М. Карташов // Докл. АН. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 17–21.
4. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 724 с.
5. Рубин, А. Г. Динамическая реакция твердого тела с теплоизолированной движущейся границей / А. Г. Рубин, Э. М. Карташов, И. А. Джемесюк // Изв. РАН. Энергетика. – 2002. – № 6. – С. 72–80.