Вестник МИТХТ, 2010, т. 5, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ХИМИИ И ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.762.5

К ОБОБЩЕННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Б.В. Алексеев, заведующий кафедрой, И.В. Овчинникова, доцент

кафедра Физики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: B.Alexeev@ru.net

На основе статистического описания рассматривается движение релятивистских частиц без учета внешних сил. Представлена гидродинамическая форма уравнения Дирака. Получена лоренц-инвариантная форма нелокального кинетического уравнения Алексеева (обобщенного уравнения Больцмана), что открывает возможность построения обобщенной релятивистской квантовой гидродинамики. Статья может также рассматриваться как продолжение исследований, изложенных в известной монографии. (Boris V. Alexeev, Generalized Boltzmann Physical Kinetics. Elsevier. 2004).

On the basis of statistical description the movement of relativistic particles without external forces is considered. The hydrodynamic form of the Dirac equation is suggested. The Lorentz invariant form of the non-local Alexeev equation (generalized Boltzmann equation) was obtained. These results lead to the possibility of construction of relativistic quantum hydrodynamics. This paper can also be considered as continuation of the known monograph (Boris V. Alexeev, Generalized Boltzmann Physical Kinetics. Elsevier. 2004).

Ключевые слова: *гидродинамическая форма уравнения Дирака, нелокальное уравнение Алексеева, релятивистская квантовая гидродинамика.*

Key words: *hydrodynamic form of Dirac equation, non-local Alexeev equation, relativistic quantum hydrodynamics.*

1. Введение. Нелокальная физика и гидродинамическое описание в квантовой механике

В работах [1–3] изложены принципы нелокальной физики, разработанные Б.В. Алексеевым, а также обобщенная квантовая механика, из которой следует квантовая механика Шредингера – Маделунга как глубокий частный случай. Последующее изложение предполагает, что читателю известны основные базовые принципы построения нерелятивистской квантовой механики в рамках нелокальной физики. Эти сведения можно найти также в учебных пособиях [4, 5]. Мы начнем изложение с напоминания основных положений нелокальных принципов в теории диссипативных неравновесных статистических систем.

В физической кинетике рассматриваются процессы переноса в открытых диссипативных системах. Поэтому кинетическое статистическое описание неизбежно связано с диагностикой системы. Таким элементом диагностики при теоретическом описании в физической кинетике является понятие физически бесконечно малого объема (ФМО). ФМО есть ***открытая*** термодинамическая система *при любом разбиении макроскопической системы набором ФМО*. Классическая трактовка ФМО, как термодинамической системы, в которой существует локальное термодинамическое равновесие (ЛТР), а значит и постоянная функция распределения (ФР) во всем ФМО, немедленно переводит описание в локальную теорию (в том числе в уравнение Больцмана) и является грубым приближением.

Основой кинетической теории неравновесных процессов является уравнение Больцмана. Уравнение Больцмана (УБ) есть локальное уравнение, справедливое на двух масштабах из минимально возможных трех масштабов. Именно, УБ справедливо на гидродинамическом масштабе и средней длине пробега, но не работает на расстояниях порядка радиуса взаимодействия. Иначе говоря, УБ не содержит нелокального интеграла столкновений. Для разреженного газа нелокальный интеграл столкновений пропорционален среднему времени τ между столкновениями. Это есть строгое утверждение, не связанное с возможными аппроксимациями, направленными на расцепление иерархии Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона (ББГКИ). Таким образом, в классическом УБ отсутствуют дополнительные однопорядковые члены, пропорциональные числу Кнудсена.

Дополнительные члены нелокального происхождения не могут быть опущены и в предельных (по числу Кнудсена) случаях теории, что автоматически превращает уравнение Больцмана из минимальной модели только лишь в правдоподобную модель. Типичный провал УБ – ситуация с теорией турбулентности.

Основной задачей при выводе нелокального кинетического уравнения относительно одночастичной функции (ФР) распределения является эффективная аппроксимация нелокального интеграла столкновений J^{nl}, основанная на методе многих масштабов в применении к иерархии Боголюбова. Как показала практика десятилетий, локальная аппроксимация нелокального интеграла столкновений, предложенная Б.В. Алексеевым,

$$J^{nl} = \frac{D}{Dt}\left(\tau \frac{Df}{Dt}\right) \qquad (1.1)$$

оказывается исключительно эффективной и приводит к обобщенному уравнению Больцмана

$$\frac{Df}{Dt}-\frac{D}{Dt}\left(\tau\frac{Df}{Dt}\right)=J^{B}, \qquad (1.2)$$

где J^{B} – больцмановский локальный интеграл столкновений, а D/Dt – субстанциональная производная, которая в общепринятых обозначениях имеет вид

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}. \qquad (1.3)$$

К аппроксимации (1.1) приводят все известные методы вывода кинетического уравнения относительно одночастичной ФР, в том числе метод многих масштабов, метод корреляционных функций, итерационный метод.

Нарушение неравенств Белла для локальных статистических теорий означает, что переход к нелокальному описанию неизбежен. Это утверждение трактуют в пользу квантовой механики, которая не является локальной теорией. Нелокальное описание является принципиально важным для любых неравновесных статистических систем, а не только для разреженного газа.

Гидродинамическая форма уравнения Шредингера была получена Маделунгом в 1927 году. Логика исследования Маделунга вполне очевидна. Волновую функцию ψ можно записать для нерелятивистской системы в виде

$$\psi\left(x_1,x_2,x_3,t\right)= \\ =\alpha\left(x_1,x_2,x_3,t\right)\ e^{i\beta\left(x_1,x_2,x_3,t\right)} \qquad (1.4)$$

Возникает естественный вопрос, каким именно уравнениям отвечают вещественная и мнимая части волновой функции (1.4). Оказывается, эти уравнения могут быть представлены в гидродинамической форме в виде уравнения неразрывности и уравнения движения Эйлера. Современники Маделунга не видели каких-либо преимуществ в адекватном представлении уравнения Шредингера. Более того, существовало (неправильное) убеждение, что квантование не может быть введено в гидродинамику Маделунга. Результат Маделунга ушел на периферию теоретической физики и был, по существу, забыт. В семидесятых годах Б.В. Алексеевым была вновь обнаружена гидродинамическая форма уравнения Шредингера (УШ). Однако это уже был принципиально новый этап развития квантовой гидродинамики. Прежде всего, следует указать, что сведение УШ к уравнениям квантовой гидродинамики (УКГ) не является однозначным. С другой стороны в семидесятых годах прошлого века численные методы гидродинамики достигли высокой степени совершенства и были с высокой степенью эффективности применены Б.В. Алексеевым и сотрудниками к квантовым расчетам (см., например, [6, 7]).

Строго говоря, справедливы следующие утверждения (Madelung, Wigner, Carnovalli Jr, Franca, Алексеев):

А) Уравнение Шредингера есть следствие бесстолкновительного уравнения Больцмана, если, следуя Вигнеру, ввести искусственную пространственную нелокальность в указанное уравнение Больцмана, а затем в окончательных результатах перейти к локальному пределу нелокального уравнения (Carnovalli, Franca, Алексеев).

Б) Уравнение Шредингера без каких-либо дополнительных предположений сводится к уравнению неразрывности и уравнению Эйлера с дополнительным потенциалом Бома, который и отражает нелокальность теории (Madelung, Алексеев).

В) Уравнение Шредингера есть глубокий частный случай обобщенных гидродинамических уравнений Алексеева, при этом параметр нелокальности τ удовлетворяет соотношению неопределенности «время-энергия» .

Установлено, что теория процессов переноса (включая квантовую механику) может быть представлена в рамках универсальной теории, основанной на нелокальном физическом описании. Показано, что уравнения нелокальной физики приводят к появлению солитонов, что поддерживает мнение Шредингера, трактовавшего квантовую механику с позиции существования волн материи. Уравнение Шредингера не является диссипативным уравнением. Поэтому квантовая гидродинамика является естественным инструментом для решения задач в теории диссипативных наносистем.

Цель последующих исследований состоит в создании обобщенной релятивистской квантовой гидродинамической теории. Как известно, использование аппарата релятивистской квантовой гидродинамики является неизбежным при обработке экспериментальных данных, полученных на коллайдерах.

Далее, следуя [6–9], мы получим возможные гидродинамические формы релятивистского квантового уравнения Дирака в отсутствие электромагнитного поля. Последующий раздел работы посвящен выводу лоренц-инвариантной форма нелокального кинетического уравнения Алексеева (обобщенного уравнения Больцмана), что открывает возможность построения обобщенной релятивистской квантовой гидродинамики.

2. Гидродинамическая форма релятивистского квантового уравнения Дирака.

Рассмотрим уравнение Дирака для квантовомеханической частицы без учета внешних сил, т. е. в отсутствие электромагнитного поля:

$$\left[\left(\frac{i\eta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (i\eta\nabla)^2 - m_0^2c^2\right]\psi = 0, \qquad (2.1)$$

или

$$-\frac{\eta^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \eta^2\Delta\psi - m_0^2c^2\psi = 0,$$

или

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{1}{\psi}\Delta\psi + \frac{m_0^2c^4}{\eta^2} = 0. \qquad (2.2)$$

Трехмерный лапласиан определяется, как обычно

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \qquad (2.3)$$

При отсутствии электромагнитного поля спин частицы неизменен, поэтому волновую функцию ψ можно записать в виде однокомпонентной скалярной величины (1.4). После дифференцирования по времени (1.4) получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = e^{i\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + i\alpha e^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = e^{i\beta}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + ie^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha e^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = e^{i\beta}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + ie^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + ie^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t} - e^{i\beta}\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t} + i\alpha e^{i\beta}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = e^{i\beta}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + 2ie^{i\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t} - e^{i\beta}\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t} + i\alpha e^{i\beta}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},$$

В результате находим представление для первого члена левой части уравнения (2.2)

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + i\frac{2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t} + i\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}. \qquad (2.4)$$

После дифференцирования функции (1.4) по x_1 получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = e^{i\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} + i\alpha e^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = ie^{i\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + e^{i\beta}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2} + ie^{i\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} - \alpha e^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + i\alpha e^{i\beta}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = 2ie^{i\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + e^{i\beta}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2} - \alpha e^{i\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_1} + i\alpha e^{i\beta}\frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}.$$

После аналогичных дифференцирований по остальным пространственным переменным, находим

$$\Delta\psi = 2ie^{i\beta}\,\mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta + e^{i\beta}\Delta\alpha - \alpha e^{i\beta}(\mathbf{grad}\ \beta)^2 + i\alpha e^{i\beta}\Delta\beta,$$

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = 2i\frac{1}{\alpha}\mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta + \frac{1}{\alpha}\Delta\alpha - (\mathbf{grad}\ \beta)^2 + i\Delta\beta.$$

Получаем представление для второго члена (2.2)

$$-c^2\frac{\Delta\psi}{\psi} = -c^2\left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - (\mathbf{grad}\ \beta)^2 + i\left(\Delta\beta + \frac{2}{\alpha}\mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta\right)\right]. \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.4), (2.6) в выражение (2.2), находим:

$$\begin{gathered}-\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + i\frac{2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t} + i\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} - \\ -c^2\left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - (\mathbf{grad}\ \beta)^2 + i\left(\Delta\beta + \frac{2}{\alpha}\mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta\right)\right] + \frac{m_0^2c^4}{\eta^2} = 0.\end{gathered} \qquad (2.7)$$

Разделяем вещественную и мнимую части. Вещественная часть:

$$-\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - (\mathbf{grad}\ \beta)^2\right] + \frac{m_0^2c^4}{\eta^2} = 0. \qquad (2.8)$$

Мнимая часть:

$$\frac{2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}-c^2\left[\Delta\beta+\frac{2}{\alpha}\mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta\right]=0. \qquad (2.9)$$

Умножим левую и правую части (2.9) на α^2:

$$2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\alpha^2\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}-c^2\left[\alpha^2\Delta\beta+2\alpha\mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta\right]=0. \qquad (2.10)$$

Прямым дифференцированием может быть доказано тождество:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left(\alpha^2\mathbf{grad}\ \beta\right)\equiv div\ \left(\alpha^2\mathbf{grad}\ \beta\right)=\alpha^2\Delta\beta+2\alpha\ \mathbf{grad}\ \alpha\cdot\mathbf{grad}\ \beta \qquad (2.11)$$

Тогда (2.10) записывается как

$$\frac{\partial\alpha^2}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\alpha^2\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}-$$
$$-c^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left(\alpha^2\mathbf{grad}\ \beta\right)=0. \qquad (2.12)$$

Введем обозначение:

$$\rho=\alpha^2. \qquad (2.13)$$

Получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\rho\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left(\rho\ grad\ \beta\right)=0, \qquad (2.14)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\frac{\partial\beta}{\partial t}\right]-c^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left[\rho\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}}\right]=0. \qquad (2.15)$$

В координатной форме (2.15) имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\frac{\partial\beta}{\partial t}\right]-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho\frac{\partial\beta}{\partial x_i}\right]=0. \qquad (2.16)$$

Введем трехмерную скорость

$$\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\eta}{m_0}\beta\right). \qquad (2.17)$$

Тогда

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\frac{1}{c}\frac{\eta}{m_0}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right]+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left[\rho\mathbf{v}\right]=0. \qquad (2.18)$$

Определим формально четвертую компоненту скорости в пространстве Минковского как

$$v_t=-\frac{1}{c}\frac{\eta}{m_0}\frac{\partial\beta}{\partial t}. \qquad (2.19)$$

Из (2.18), (2.19) получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v_t\right]+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left[\rho\mathbf{v}\right]=0. \qquad (2.20)$$

Проверим размерность в (2.19):

$$\left[v_t\right]=\frac{сек}{см}\frac{эрг}{г}\frac{сек}{сек}=\frac{сек}{см}\frac{г\ см^2}{г\ сек^2}=\frac{см}{сек}$$

т.к. β – безразмерная величина.

В работе Алексеева Б.В. [5] представлены соответствующие выражения для нерелятивистского случая:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot\left(\rho\mathbf{v}\right)=0,$$

где

$$\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\eta}{m}\beta\right).$$

Рассмотрим теперь вещественную часть релятивистского уравнения (формула (2.8)). Перепишем её в виде:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{m_0^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{m_0^2}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{h^2}{m_0^2}\left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha}-(\mathbf{grad}\ \beta)^2\right]+c^2=0, \qquad (2.21)$$

или, используя (2.19)

$$-v_t^2+\frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{m_0^2}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{h^2}{m_0^2}\left[\frac{\Delta\alpha}{\alpha}-(\mathbf{grad}\ \beta)^2\right]+c^2=0. \qquad (2.22)$$

Используя определение трехмерной скорости (2.17), имеем:

$$-v_t^2+\frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{m_0^2}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{h^2}{m_0^2}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}+v^2+c^2=0. \qquad (2.23)$$

Применяя оператор градиента к обеим сторонам уравнения (2.23), получим:

$$-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v_t^2+\frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right]-$$
$$-\frac{h^2}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v^2=0. \qquad (2.24)$$

Используем известное тождество (см.[10], стр. 544):

$$2\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v^2-2\mathbf{v}\times\mathbf{rot}\ \mathbf{v}. \qquad (2.25)$$

При этом из (2.17)

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{v}=\frac{\eta}{m_0}\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\ \beta=0, \qquad (2.26)$$

тогда

$$2\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v^2. \tag{2.27}$$

Из (2.24) с помощью (2.13), (2.27) получим

$$-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v_t^2+2\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{h}^2}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial t^2}\right]+\frac{\mathrm{h}^2}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}},$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v_t^2+2\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=$$
$$=-\frac{\mathrm{h}^2}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left[\frac{1}{c^2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial t^2}-\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right]. \tag{2.28}$$

При этом

$$-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}v_t^2=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathrm{h}}{m_0}\right]^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2=$$
$$=-2\frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathrm{h}}{m_0}\right]^2\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)=$$
$$=-2\frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathrm{h}}{m_0}\right]^2\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{r}}\right)=$$
$$=2\frac{v_t}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} \tag{2.29}$$

Представим уравнение (2.28) с помощью (2.29) в виде

$$2\frac{v_t}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}+2\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=$$
$$=-\frac{\mathrm{h}^2}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left[\frac{1}{c^2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial t^2}-\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right]. \tag{2.30}$$

Введем *дополнительное условие*

$$v_t=c. \tag{2.31}$$

Тогда мы получаем систему уравнений гидродинамического типа. Уравнение неразрывности следует из (2.20), (2.31):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\cdot[\rho\mathbf{v}]=0 \tag{2.32}$$

Уравнение движения следует из (2.30), (2.31):

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}+\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=$$
$$=-\frac{\mathrm{h}^2}{2m_0^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left[\frac{1}{c^2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial t^2}-\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right]. \tag{2.33}$$

Уравнение (2.33) можно также записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}+\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}U^*, \tag{2.34}$$

где $U^\bullet$ – обобщение потенциала Бома для релятивистского случая

$$U^*=\frac{\eta^2}{2m_0^2}\left[\frac{1}{c^2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial t^2}-\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right]. \tag{2.35}$$

Введем переменную

$$x_0=ct, \tag{2.36}$$

которая часто используется в релятивистской механике, и 4-лапласиан

$$\Delta_4=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\Delta. \tag{2.37}$$

Тогда релятивистский потенциал Бома можно записать в виде:

$$U^*=\frac{\eta^2}{2{m_0}^2}\frac{\Delta_4\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{2.38}$$

Таким образом, 4-х мерный (релятивистский) потенциал Бома содержит, кроме пространственных производных, еще и производную по времени. Как известно [5], в нерелятивистском случае потенциал Бома имеет вид

$$U^*=-\frac{\eta^2}{2m^2}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{2.39}$$

Поскольку

$$\Delta_4\sqrt{\rho}=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\sqrt{\rho}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\sqrt{\rho}=\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\sqrt{\rho}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\rho}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial x_0}\right]-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right]+\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_0^2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right]-\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}=-\frac{1}{4\rho^{3/2}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_0}\right]^2+\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_0^2}+$$
$$+\frac{1}{4\rho^{3/2}}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right]^2-\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\Delta_4\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}=-\frac{1}{4\rho^2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_0}\right]^2+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_0^2}+\frac{1}{4\rho^2}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right]^2-\frac{1}{2\rho}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}, \tag{2.40}$$

то потенциал Бома можно записать в виде:

$$U^* = \frac{h^2}{2m_0^2}\frac{\Delta_4\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = -\frac{h^2}{8m_0^2\rho^2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_0}\right]^2 + \\ + \frac{h^2}{4m_0^2\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_0^2} + \frac{h^2}{8m_0^2\rho^2}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right]^2 - \frac{h^2}{4m_0^2\rho}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}. \qquad (2.41)$$

В частности, в одномерном случае уравнение (2.34) с учетом (2.41) принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\eta^2}{4m_0{}^2\rho}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right) + \frac{\eta^2}{8m_0{}^2\rho^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right], \qquad (2.42)$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\eta^2}{4m_0{}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right]. \qquad (2.43)$$

Если ввести квантовую кинематическую вязкость

$$\frac{\eta}{m_0} = \nu_{qu}, \qquad (2.44)$$

то получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\nu_{qu}^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right]. \qquad (2.45)$$

В нерелятивистском случае из (2.43) имеем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\eta^2}{4m_0{}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right)\right]. \qquad (2.46)$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x^2) = \rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho v_x}{\partial x} = \rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = \\ = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right). \qquad (2.47)$$

При преобразованиях в (2.47) учтено, что из (2.32) в одномерном случае имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} = 0. \qquad (2.48)$$

Тогда (2.46) с учетом (2.47) принимает вид (обозначим $v_x = u$):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = \frac{h^2}{4m_0{}^2}\rho\frac{\partial}{\partial x}\times \\ \times\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right)\right], \qquad (2.49)$$

что полностью совпадает с полученным Алексеевым Б.В. в работе [2] выражением

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = \\ = \frac{h^2}{4m^2}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\gamma\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \delta\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \qquad (2.50)$$

причем в [2] показано, что значения коэффициентов $\gamma = 1$, $\delta = 0.5$ соответствуют уравнению Шредингера.

Отметим, что выражение для скорости v_t (2.19) при использовании дополнительного условия (2.31) принимает вид:

$$c = -\frac{1}{c}\frac{\eta}{m_0}\frac{\partial\beta}{\partial t}, \qquad (2.51)$$

или

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = -\frac{m_0c^2}{\eta}.$$

Интегрируя, получим

$$\beta = -\frac{m_0c^2}{\eta}t + const. \qquad (2.52)$$

Тогда из (1.4)

$$\psi = \alpha e^{-i\frac{m_0c^2}{\eta}t}. \qquad (2.53)$$

Здесь постоянная интегрирования включена в коэффициент α волновой функции

$\psi = \alpha e^{-i\frac{m_0 c^2}{\eta}t}$. Отметим, что

$$\varpi_{qu} = \frac{m_0 c^2}{\eta} \quad (2.54)$$

есть квантовая частота.

Появление знака «минус» в показателе экспоненты волновой функции, как подробно описано в работе [5], связано с введением необратимости в систему. Использование условия $v_t = -c$ привело бы к изменению знака в показателе экспоненты и к изменению знака при производной по времени, в частности, в уравнении неразрывности (2.32). Существование таких уравнений невозможно с точки зрения теории необратимых процессов.

Остановимся еще раз на условии $v_t = c$. В релятивистской кинетической теории 4-ех вектор гидродинамической скорости определяется как

$$u^\alpha = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right), \ \alpha = 1,2,3,4.$$

При этом 4-х мерный вектор потока частиц $N^\alpha = n_R U^\alpha = n\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}u^\alpha$, где n_R – плотность частиц в системе отсчета, в которой $\mathbf{v} = 0$, n – плотность частиц в системе отсчета, относительно которой поток движется со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда «временна́я» компонента $N^\alpha = cn$, т.е. условие $v_t = c$ является обоснованным.

3. Обобщенные релятивистские кинетические уравнения.

Проведем обобщение кинетического уравнения Алексеева (1.2) на релятивистский случай. С этой целью нерелятивистская субстанциональная производная

$$D_{nrel} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \ i = 1,2,3, \quad (3.1)$$

трансформируется в релятивистскую субстанциональную производную

$$D_{rel} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \ \alpha = 0,1,2,3, \quad (3.2)$$

$$p^0 = m_0 \gamma c, \ p^i = m_0 \gamma v^i. \quad (3.3)$$

Здесь m_0 – масса покоя; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, где v – модуль скорости частицы в системе наблюдателя. При этом $p^0 = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$, поскольку

$$\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = \sqrt{\frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m_0^2 c^2} = \sqrt{\frac{m_0^2 v^2 + m_0^2 c^2 - m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \gamma c \quad (3.4)$$

Вводим неподвижную систему координат K и подвижную систему координат K'. Пусть материальное тело движется в системе K со скоростью v^1 вдоль оси x^1. Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью V^1 вдоль оси x^1. Тогда

$$dx^1 = \frac{dx'^1 + V^1 dt'}{\sqrt{1-\frac{(V^1)^2}{c^2}}}, \ dx^{,2} = dx'^{,2},$$
$$dx^{,3} = dx'^{,3}, \ dt = \frac{dt' + \frac{V^1}{c^2}dx'^1}{\sqrt{1-\frac{(V^1)^2}{c^2}}}. \quad (3.5)$$

Разделим почленно первые три равенства на четвертое. Имеем

$$v^1 = \frac{dx^1}{dt} = \frac{dx'^1 + V^1 dt'}{dt' + \frac{V^1}{c^2}dx'^1}, \quad (3.6)$$

$$v^{,2} = \frac{dx'^{,2}\sqrt{1-\frac{(V^1)^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V^1}{c^2}dx'^1}, \quad (3.7)$$

$$v^{,3} = \frac{dx'^{,3}\sqrt{1-\frac{(V^1)^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V^1}{c^2}dx'^1}, \quad (3.8)$$

или $$v^1 = \frac{\frac{dx'^1}{dt'} + V^1}{1 + \frac{V^1}{c^2}\frac{dx'^1}{dt'}} = \frac{v'^1 + V^1}{1 + \frac{V^1 v'^1}{c^2}} \quad (3.9)$$

$$v^{,2} = \frac{v'^{,2}\sqrt{1-\dfrac{(V^1)^2}{c^2}}}{1+\dfrac{V^1}{c^2}v'^1}, \qquad (3.10)$$

$$v^{,3} = \frac{v'^{,3}\sqrt{1-\dfrac{(V^1)^2}{c^2}}}{1+\dfrac{V^1}{c^2}v'^1}. \qquad (3.11)$$

Соотношения (3.9) – (3.11) могут трактоваться следующим образом – какие компоненты скорости видит неподвижный наблюдатель, если в подвижной системе составляющие скорости есть v'^1, $v'^{,2}$, $v'^{,3}$. Пусть

$$f\left[t\left(t', x'^1\right), x^1\left(t', x'^1\right), x^{,2}, x^{,3}\right].$$

Преобразования Лоренца для координат и времени имеют вид:

$$x^1 = \frac{x'^1 + V^1 t'}{\sqrt{1-\dfrac{(V^1)^2}{c^2}}},\ x^{,2} = x'^{,2},$$

$$x^{,3} = x'^{,3},\ t = \frac{t' + \dfrac{V^1}{c^2}x'^1}{\sqrt{1-\dfrac{(V^1)^2}{c^2}}}. \qquad (3.12)$$

Найдем некоторые частные производные, необходимые нам в дальнейшем:

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial t}{\partial t'}\right]_{x'^1=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^1}{\partial t'}\right]_{x'^1=const} +$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,2}}\right]_{t, x^1, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^{,2}}{\partial t'}\right]_{x'^{,2}=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right]_{t, x^1, x^{,2}=const} \left[\frac{\partial x^{,3}}{\partial t'}\right]_{x'^{,3}=const}$$

Учитывая, что 2 последние слагаемые обращаются в 0, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial t}{\partial t'}\right]_{x'^1=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^1}{\partial t'}\right]_{x'^1=const},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \frac{V^1}{\sqrt{1-\dfrac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}. \qquad (3.13)$$

Для пространственных производных аналогично получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x'^1} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial t}{\partial x'^{,1}}\right]_{t'=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^1}{\partial x'^{,1}}\right]_{t'=const} +$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,2}}\right]_{t, x^1, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^{,2}}{\partial x'^{,1}}\right]_{x'^{,2}=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right]_{t, x^1, x^{,2}=const} \left[\frac{\partial x^{,3}}{\partial x'^{,1}}\right]_{x'^{,3}=const}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^1} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial t}{\partial x'^{,1}}\right]_{t'=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^1}{\partial x'^{,1}}\right]_{t'=const},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^1} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \frac{\dfrac{V^1}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}. \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{,2}} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^1, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial t}{\partial x'^{,2}}\right]_{t', x'^1=const} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]_{t, x^{,2}, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^1}{\partial x'^{,2}}\right]_{t', x'^1=const} +$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,2}}\right]_{t, x^1, x^{,3}=const} \left[\frac{\partial x^{,2}}{\partial x'^{,2}}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right]_{t, x^1, x^{,2}=const} \left[\frac{\partial x^{,3}}{\partial x'^{,2}}\right]_{x'^{,3}=const} \qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{,2}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,2}}\right]_{t, x^1, x^{,3}=const} \qquad (3.16)$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{,3}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right]_{t,x^1,x^{,2}=const}. \qquad (3.17)$$

Рассмотрим релятивистскую субстанциональную производную (3.2) в системе K'. Подставляя значения импульсов (3.3) и выражения (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), получим:

$$m_0\gamma'\frac{\partial f}{\partial t'} + m_0\gamma' v'^1\frac{\partial f}{\partial x'^1} + m_0\gamma' v'^{,2}\frac{\partial f}{\partial x'^{,2}} + m_0\gamma' v'^{,3}\frac{\partial f}{\partial x'^{,3}} =$$

$$= m_0\gamma'\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + m_0\gamma'\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]\frac{V^1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + m_0\gamma' v'^1\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\frac{\frac{V^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} +$$

$$+m_0\gamma' v'^1\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + m_0\gamma' v'^{,2}\frac{\partial f}{\partial x^{,2}} + m_0\gamma' v'^{,3}\frac{\partial f}{\partial x^{,3}} = \qquad (3.18)$$

$$= m_0\gamma'\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + v'^1\frac{\frac{V^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}\right] + m_0\gamma'\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]\left[\frac{V^1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + v'^1\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}\right] +$$

$$+m_0\gamma' v'^{,2}\left[\frac{\partial f}{\partial x^{,2}}\right] + m_0\gamma' v'^{,3}\left[\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right]$$

Используем формулы (3.9)-(3.11) для скоростей. Выразим из них $(v'^1 + V^1), v'^{,2}, v'^{,3}$ и подставим в (3.18):

$$m_0\gamma'\left\{\frac{\partial f}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial f}{\partial x'^1} + v'^{,2}\frac{\partial f}{\partial x'^{,2}} + v'^{,3}\frac{\partial f}{\partial x'^{,3}}\right\} =$$

$$= m_0\gamma'\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + v'^1\frac{\frac{V^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}\right] +$$

$$+m_0\gamma' v^1\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\right]\frac{1+\frac{V^1 v'^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + m_0\gamma' v^{,2}\left[\frac{\partial f}{\partial x^{,2}}\right]\frac{1+\frac{V^1 v'^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} + m_0\gamma' v^{,3}\left[\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right]\frac{1+\frac{V^1 v'^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} = \qquad (3.19)$$

$$= m_0\gamma'\frac{1+\frac{V^1 v'^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + v^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + v^{,2}\frac{\partial f}{\partial x^{,2}} + v^{,3}\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right\}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial f}{\partial x'^1} + v'^{,2}\frac{\partial f}{\partial x'^{,2}} + v'^{,3}\frac{\partial f}{\partial x'^{,3}} = \frac{1+\frac{V^1 v'^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + v^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + v^{,2}\frac{\partial f}{\partial x^{,2}} + v^{,3}\frac{\partial f}{\partial x^{,3}}\right\} \qquad (3.20)$$

Преобразуем коэффициент перед фигурной скобкой. Используя (3.9), имеем:

$$\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}\left[\frac{v'^1+V^1}{1+\frac{v'^1V^1}{c^2}}\right]^2,$$

$$1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}=1-\frac{1}{c^2}\frac{\left(v'^1+V^1\right)^2}{\left(1+\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2}\left[\left(1+\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(v'^1+V^1\right)^2\right]= \quad (3.21)$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2}\left[1+2\frac{v'^1V^1}{c^2}+\left(\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left((v'^1)^2+(V^1)^2+2v'^1V^1\right)\right]$$

или

$$1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2}\left[1+\left(\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left((v'^1)^2+(V^1)^2\right)\right],$$

откуда

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}}}=\frac{1+\frac{v'^1V^1}{c^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{v'^1V^1}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left((v'^1)^2+(V^1)^2\right)}} \quad (3.22)$$

Преобразуем знаменатель в (3.22):

$$\sqrt{1+\left(\frac{V^1}{c^2}v'^1\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\left(v'^1\right)^2+\left(V^1\right)^2\right)}=\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}+\left(\frac{V^1}{c^2}v'^1\right)^2-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}\left(1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}\right)}= \quad (3.23)$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}\right)}$$

Из (3.22), (3.23) следует:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}}}=\frac{1+\frac{v'^1V^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}}}, \quad (3.24)$$

или

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{1+\frac{v'^1V^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}. \quad (3.25)$$

Используем (3.25) для преобразования (3.20). Имеем инвариантную запись

$$m_0\gamma'\left\{\frac{\partial f}{\partial t'}+v'^1\frac{\partial f}{\partial x'^1}+v'^2\frac{\partial f}{\partial x'^2}+v'^3\frac{\partial f}{\partial x'^3}\right\}=m_0\gamma\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+v^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+v^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+v^3\frac{\partial f}{\partial x^3}\right\} \quad (3.26)$$

или, в эквивалентных формах

$$D_{rel} = D_{rel}{}' , \tag{3.27}$$

$$p^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = p'^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} . \tag{3.28}$$

Переходим к обобщенному релятивистскому уравнению Больцмана (ОРУБ). Процедура релятивистского обобщения кинетического нерелятивистского уравнения Алексеева заключается в следующем:

Этап 1. Уравнение (1.2) почленно умножается на $m_0\gamma$. В результате в левой части уравнения появляется комбинация лоренц-инвариантных субстанциональных производных (см. (3.26) – (3.28)), поскольку инвариантным является выражение $p^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = inv$.

Однако,

$$p^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} - p^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\tau}{m_0}\left(p^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} f\right)\right] = = inv , \tag{3.29}$$

если среднее время между столкновениями

$$\tau = \tau' = \tau_0 = inv , \tag{3.30}$$

не зависит от выбора системы координат, определяется собственным временем движения частиц и, следовательно, также является инвариантом.

Этап 2. Запишем теперь ОРУБ в виде:

$$p^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} - p^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\tau}{m_0}\left(p^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} f\right)\right] = = m_0\gamma J^{B,rel} ,\ \alpha, \beta = 0,1,2,3. \tag{3.31}$$

Правая часть уравнения (3.31) должна представлять лоренц - инвариантный интеграл столкновений

$$J_{INV}^{B,rel} = m_0\gamma J^{B,rel} . \tag{3.32}$$

Нас интересует прямое преобразование интеграла Больцмана, имеющего вид [11]:

$$J^{B,rel} = = \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] v_g \sigma d\Omega \frac{p_{\alpha} p_*^{\alpha}}{p^0 p_*^0} d^3 p_* , \tag{3.33}$$

где σ – дифференциальное сечение столкновения, $d\Omega$ – элементарный телесный угол, знак «invert» далее используется для обозначения характеристик обратных столкновений, поскольку знак «штрих» уже занят параметрами подвижной системы координат, при этом

$$v_g = \frac{p^0 p_*^0}{p_{\alpha} p_*^{\alpha}} \sqrt{\left(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v} \times \mathbf{v}_*\right)^2} \tag{3.34}$$

Покажем, что интеграл столкновений (3.33) действительно переходит в больцмановский локальный интеграл в нерелятивистском случае. С этой целью используем соотношение (см. [11]):

$$p_{\alpha} p_*^{\alpha} = \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{v}_*}{c}\right) p_*^0 p^0$$

или

$$\frac{p_{\alpha} p_*^{\alpha}}{p_*^0 p^0} = 1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{v}_*}{c} \tag{3.35}$$

В нерелятивистском приближении

$$\begin{aligned} J^{B} &= \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] v_g \sigma d\Omega \frac{p_{\alpha} p_*^{\alpha}}{p^0 p_*^0} d^3 p_* = \\ &= \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] v_g \sigma d\Omega d^3 p_* = \\ &= \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] v_g^{nonrel} \sigma d\Omega d^3 p_* = \\ &= \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] \left|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*\right| \sigma d\Omega d^3 p_* \end{aligned} \tag{3.36}$$

Запишем теперь (3.33) в виде

$$J^{B,rel} = = \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] v_g \sigma d\Omega \frac{p_{\alpha} p_*^{\alpha}}{p^0} \frac{d^3 p_*}{p_*^0} \tag{3.37}$$

и отметим, что $\frac{d^3 p_*}{p_*^0}$ есть инвариант (см. [11]).

Приведенный интеграл (3.37) не инвариантен относительно преобразования Лоренца из-за присутствия p^0 в знаменателе. Подставим $p^0 = m_0\gamma c$. Имеем из (3.37)

$$J^{B,rel} = \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] v_g \sigma d\Omega \frac{p_{\alpha} p_*^{\alpha}}{m_0\gamma c} \frac{d^3 p_*}{p_*^0} , \tag{3.38}$$

или

$$J_{INV}^{B,rel} = m_0\gamma J^{B,rel} = \int \left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f \right] \frac{v_g}{c} \sigma p_{\alpha} p_*^{\alpha} d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_*^0} = inv . \tag{3.39}$$

Для отношения v_g / c справедливо соотношение [11]

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{\left(p_{\alpha} p_*^{\alpha}\right)^2}} , \tag{3.40}$$

используя которое, находим из (3.39)

$$J_{INV}^{B,rel} = m_0\gamma J^{B,rel} = \int\left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f\right]\sqrt{\left(p_\alpha p_*^\alpha\right)^2 - m_0^4 c^4}\,\sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_*^0} = inv\,. \qquad (3.41)$$

Это инвариантный релятивистский интеграл столкновений. Тем самым доказано, что правая интегральная часть ОРУБ является лоренц – инвариантной.

Этап 3. Записываем ОРУБ в виде

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\tau}{m_0}\left(p^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} f\right)\right] =$$
$$\int\left[f_*^{invert} f^{invert} - f_* f\right]\sqrt{\left(p_\alpha p_*^\alpha\right)^2 - m_0^4 c^4}\,\sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_*^0}. \qquad (3.41)$$

Таким образом, инвариантное релятивистское обобщенное уравнение Больцмана записывается в виде:

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\tau}{m_0}\left(p^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} f\right)\right] = = J_{INV}^{B,rel},\ \alpha = 0,1,2,3. \qquad (3.43)$$

Обратим внимание на размерность физических величин, входящих в (3.43).

$\int f d^3 p = n$, где n – концентрация частиц. Тогда

$$\frac{г\ см}{с}\frac{г\ см}{с}\frac{г\ см}{с}[f] = \frac{1}{см^3},$$

$$[f] = \frac{с^3}{г^3 см^6}, \left[p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right] = \frac{г}{с}\frac{с^3}{г^3 см^6} = \frac{с^2}{г^2 см^6},$$

$$\left[J_{INV}^{B,rel}\right] = [f]^2\left(\frac{г\ см}{с}\right)^4 см^2 =$$
$$= \frac{c^6}{г^6 см^{12}}\frac{см^4}{c^4} г^4 см^2 = \frac{c^2}{г^2 см^6}.$$

На основе полученного релятивистского обобщенного уравнения Больцмана могут быть выведены обобщенные релятивистские гидродинамические уравнения.

4. Модельные обобщенные релятивистские кинетические уравнения.

Рассмотрим одномерный случай и преобразование релятивистской субстанциональной производной другим способом, который приводит к дополнительным, полезным при дальнейших преобразованиях, соотношениям. В системе наблюдателя K релятивистская субстанциональная производная имеет вид

$$D^1_{rel} = p^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + p^1 \frac{\partial}{\partial x^1} = m_0\gamma c \frac{\partial}{\partial x^0} + p^1 \frac{\partial}{\partial x^1} =$$
$$m_0\gamma c \frac{\partial}{\partial ct} + p^1 \frac{\partial}{\partial x^1} = m_0\gamma \frac{\partial}{\partial t} + p^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad (4.1)$$

где $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\left(v^1\right)^2}{c^2}}}$.

Преобразуем (4.1)

$$D^1_{rel} = m_0\gamma \frac{\partial}{\partial t} + p^1 \frac{\partial}{\partial x^1} = m_0\gamma \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} +$$
$$mv^1 \frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = m_0\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + v^1 \frac{\partial}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right) \qquad (4.2)$$

при вычислении производных $\dfrac{\partial t'}{\partial t}, \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1}$ используем преобразования Лоренца (3.5)

$$dt = \frac{dt' + \dfrac{V^1}{c^2}dx'^1}{\sqrt{1 - \dfrac{(V^1)^2}{c^2}}},$$

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{(V^1)^2}{c^2}}dt - \frac{V^1}{c^2}dx'^1,$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \sqrt{1 - \frac{(V^1)^2}{c^2}} - \frac{V^1}{c^2}\frac{\partial x'^1}{\partial t} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{(V^1)^2}{c^2}} - \frac{V^1}{c^2}\frac{\partial x'^1}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t},$$

откуда находим

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(1 + \frac{V^1}{c^2}v'^1\right) = \sqrt{1 - \frac{(V^1)^2}{c^2}}, \qquad (4.3)$$

или

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{(V^1)^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V^1}{c^2}v'^1}. \qquad (4.4)$$

Из (4.3), (4.4) следует

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\gamma'}{\gamma}. \qquad (4.5)$$

Найдем $\dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1}$. Из соотношения (3.5) $dx^1 = \left(dx'^1 + V^1 dt'\right)/\sqrt{1 - \dfrac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}$ следует

$$dx'^1 = \sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}dx^1 - V^1 dt', \tag{4.6}$$

или

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}} - V^1\frac{\partial t'}{\partial x^1} = ,$$

$$= \sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}} - V^1\frac{\partial t'}{\partial x'^1}\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}$$

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\left(1+V^1\frac{\partial t'}{\partial x'^1}\right) = \sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}},$$

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\left(1+\frac{V^1}{v'^1}\right) = \sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}.$$

Итак, $\dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \dfrac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{v'^1}}$. (4.7)

Субстанциональная производная (4.1) приводится к виду:

$$D^1{}_{rel} = $$

$$= m\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}\left(\frac{1}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\frac{\partial}{\partial t'} + v^1\frac{1}{1+\frac{V^1}{v'^1}}\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) \tag{4.8}$$

Используем (3.9) для преобразования v^1 в (4.8). Получим:

$$D^1{}_{rel} = m\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}\left(\frac{1}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{v'^1+V^1}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\frac{1}{1+\frac{V^1}{v'^{,1}}}\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) =$$

$$= m\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{v'^1+V^1}{1+\frac{V^1}{v'^1}}\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) = m\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) \tag{4.9}$$

Итак,

$$D^1{}_{rel} = m\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = m\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right), \tag{4.10}$$

$$\text{или } \frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right). \tag{4.11}$$

Если $V^1 = 0$, то, как и следовало ожидать,

$$\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}. \tag{4.12}$$

Отметим, что при $V^1 = c$ наблюдатель в покоящейся системе координат видит, что в системе K', движущейся со скоростью света, комбинация

$$\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1} = 0$$

обращается в нуль.

Докажем инвариантность

$$D^1{}_{rel} = p^0\frac{\partial}{\partial x^0} + p^1\frac{\partial}{\partial x^1}:$$

$$D^1{}_{rel} = m\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) =$$

$$= \frac{m}{m'}\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(m'\frac{\partial}{\partial t'} + p'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) = \tag{4.13}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}}}\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(m'\frac{\partial}{\partial t'} + p'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)$$

Здесь $m = m_0\gamma$, $m' = m_0\gamma'$. Подставляя выражение (3.24) для γ в (4.13), имеем:

$$D^1_{rel} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}}}\frac{1}{\gamma}\left(m'\frac{\partial}{\partial t'} + p'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right) = \tag{4.14}$$

$$= m'\frac{\partial}{\partial t'} + p'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}.$$

Итак, доказано другим способом, что

$$D^1_{rel} = m\frac{\partial}{\partial t} + p^1\frac{\partial}{\partial x^1} = \tag{4.15}$$

$$= m'\frac{\partial}{\partial t'} + p'^1\frac{\partial}{\partial x'^1},$$

$$D^1_{rel} = D'^1_{rel}, \tag{4.16}$$

или в другой форме

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\left(v^1\right)^2}{c^2}}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = \tag{4.17}$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}}}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right).$$

Заметим, что

$$p^0\frac{\partial}{\partial x^0} = m_0\gamma c\frac{\partial}{\partial x^0} = m_0\gamma\frac{\partial}{\partial t} = m\frac{\partial}{\partial t}$$

и в одномерном случае (3.31)

$$p^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - p^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\tau}{m_0}\left(p^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}f\right)\right] =$$

$$= m_0\gamma J^{B,rel}$$

принимает вид:

$$m\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right)f - m\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\tau}{m_0}m\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right)f\right] = mJ^{B,rel},$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right)f - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\times \tag{4.18}$$

$$\times\left[\tau\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^1\frac{\partial}{\partial x^1}\right)f\right] = J^{B,rel}.$$

Инвариантное время $\tau_0 = \tau$ имеет смысл собственного интервала времени, а

$$\tau\gamma = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.19}$$

имеет смысл интервала времени в системе отсчета *K*.

Переходим в подвижную систему координат K'. Используя представление (4.9) и формулу (3.25) для $\frac{\gamma}{\gamma'}$, имеем из (4.18)

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)f -$$

$$-\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)\times \tag{4.20}$$

$$\times\left[\tau\gamma'\frac{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}\frac{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)f\right] =$$

$$= J^{B,rel}$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)f - \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)\times$$

$$\times\left[\tau\gamma'\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)f\right] = \tag{4.21}$$

$$= \frac{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}}J^{B,rel}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)f - \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)\times \tag{4.22}$$

$$\times\left[\tau\gamma'\left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}\right)f\right] = \frac{\gamma}{\gamma'}J^{B,rel}.$$

Используем соотношение

$$J^{B,rel}\gamma = J'^{B,rel}\gamma', \tag{4.23}$$

вытекающее из (3.32). Тогда

$$J^{B,rel}\frac{1+\frac{V^1}{c^2}v'^1}{\sqrt{1-\frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} = J'^{B,rel}. \tag{4.24}$$

Соотношение (4.23) полезно при построении релятивистских модельных аппроксимаций интеграла столкновений.

Вводим релятивистское обобщение БГК аппроксимации

$$J^{B,rel} = -\frac{f - f^{(0)}}{\Delta t}, \quad (4.25)$$

где Δt – некоторый характерный временной (релаксационный) интервал, преобразующийся в соответствии с преобразованием Лоренца. Именно, в соответствии с (3.5)

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V^1}{c^2}\Delta x'^1}{\sqrt{1 - \frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}},$$

имеем

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1 + \frac{V^1}{c^2}\frac{\Delta x'^1}{\Delta t'}}{\sqrt{1 - \frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} = \Delta t' \frac{1 + \frac{V^1}{c^2}v'^1}{\sqrt{1 - \frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} \quad (4.26)$$

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1 + \frac{v'^1 V^1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\left(V^1\right)^2}{c^2}}} = \quad (4.27)$$

$$= \gamma \sqrt{1 - \frac{\left(v'^1\right)^2}{c^2}} \Delta t' = \Delta t' \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Иначе говоря, выполняется аналог (4.5)

$$\frac{1}{\Delta t}\gamma = \frac{1}{\Delta t'}\gamma'. \quad (4.28)$$

Как видим, именно величина $\sim \upsilon_{релаксации} = \frac{1}{\Delta t}$ играет роль модельного интеграла столкновений в теории релятивистской БГК - аппроксимации. В нерелятивистском приближении, естественно, $\Delta t = \Delta t' = \tau_{релаксации}$; $\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$ имеет смысл инвариантного интервала собственного времени, а $\Delta t = \gamma \Delta \tau$, аналогично (4.19), имеет смысл интервала времени в *K*. При этом $\gamma J^B = -\frac{f - f^{(0)}}{\Delta \tau} = inv.$

На основе полученного релятивистского обобщенного уравнения Больцмана могут быть выведены обобщенные релятивистские гидродинамические уравнения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Alexeev, B. V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics. / B. V. Alexeev. – Amsterdam : Elsevier, 2004. – 368 с.
2. Alexeev, B. V. Generalized Quantum Hydrodynamics and Principles of Non-Local Physics / B. V. Alexeev // J. Nanoelectronics and Optoelectronics. – 2008. – Vol. 3, № 2. – P. 143–158.
3. Alexeev, B.V. Application of Generalized Quantum Hydrodynamics in the Theory of Quantum Soliton's Evolution / B. V. Alexeev // J. Nanoelectronics and Optoelectronics. – 2008. – Vol. 3, № 3. – P. 316–328.
4. Алексеев, Б. В. Избранные главы квантовой механики / Б. В. Алексеев. – М. : ИПЦ МИТХТ, 2003. – 54 с.
5. Алексеев, Б. В. Обобщенная квантовая гидродинамика и принципы нелокальной физики / Б. В. Алексеев. – М. : ИПЦ МИТХТ, 2007. – 43 с.
6. Алексеев, Б. В. Об одном подходе к решению уравнений квантовой механики / Б. В. Алексеев // Физические процессы в нейтральных и ионизованных газах. – М. : Изд. МАИ, 1981. – С. 3–7.
7. Алексеев, Б. В. Об одном подходе к решению уравнения Шредингера / Б. В. Алексеев, А. И. Абакумов // ДАН СССР. – 1982. – Т. 262, № 5. – С. 1100–1102.
8. Алексеев, Б. В. Математическое моделирование упругого взаимодействия быстрых электронов с атомами и молекулами. Сообщения по прикладной математике / Б. В. Алексеев, А. И. Абакумов, М. И. Виноградов. – М. : Изд. ВЦ АН СССР, 1986. – 67 с.
9. Алексеев, Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов / Б. В. Алексеев. – М.: Наука, 1982. – 420 с.
10. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Гостехиздат, 1954. – 608 с.
11. Cercignani, C. The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications / C. Cercignani, G. M. Kremer. – Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 2002. – 384 с.