УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Э.М. Карташов

Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий), Москва 119571, Россия
@Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

Развита математическая теория построения интегрального преобразования и формулы обращения для него для третьей краевой задачи в области с непрерывным спектром собственных значений. Метод основан на операционном решении исходной задачи с начальной функцией общего вида, удовлетворяющей условию Дирихле, и однородному граничному условию третьего рода. На основе полученных соотношений предложена серия аналитических решений третьей краевой задачи для уравнения параболического типа в различных эквивалентных функциональных формах. Предложено интегральное представление аналитических решений третьей краевой задачи при общей форме записи краевых функций в исходной постановке задачи. Выведена соответствующая функция Грина.

Ключевые слова: *третья краевая задача, полуограниченная область, интегральное преобразование, формула обращения, аналитические решения.*

INTEGRAL TRANSFORMATION FOR THE THIRD BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTIVITY WITH A CONTINUOUS SPECTRUM OF EIGENVALUES

E.M. Kartashov

Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow 119571, Russia
@Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru

The mathematical theory of constructing an integral transformation and the inversion formula for it for the third boundary value problem in a domain with a continuous spectrum of eigenvalues are developed. The method is based on the operational solution of the initial problem with an initial function of general form satisfying the Dirichlet condition and a homogeneous boundary condition of the third kind. On the basis of the obtained relations, a series of analytical solutions of the third boundary value problem for a parabolic equation in various equivalent functional forms is proposed. An integral representation of the analytic solutions of the third boundary-value problem is proposed for the general form of the representation of boundary-value functions in the initial formulation of the problem. The corresponding Green's function is written out.

Keywords: *the third boundary value problem, semi-bounded domain, integral transformation, formula of treatment, analytical solutions.*

Метод интегральных преобразований, развитый автором в [1–3], основан на решениях спектральных задач на собственные значения и собственные функции. Исторически этот метод возник позднее метода разделения переменных, а метод конечных интегральных преобразований появился лишь недавно (в середине 30-х годов прошлого столетия). Несмотря на достигнутые успехи в этой области, ряд вопросов до сих пор остаются мало изученными. В частности, недостаточно развита теория интегральных преобразований для уравнений параболического типа в области $\Omega = (x > 0, t > 0)$, с условием теплообмена на границе области. Традиционный подход на основе классических представлений математической физики, связанный со сложными вычислениями спектральной функции задачи Штурма-Лиувилля [4, 5], затрудняет построение как самого интегрального преобразования, так и формулы обращения для него.

Решению этой проблемы посвящена настоящая публикация. Излагается новый (самостоятельный) подход, позволяющий значительно сократить вычислительные затраты по сравнению с известными расчетными схемами. Выбор указанной выше области с граничным условием третьего рода на границе имеет важное значение для многих практических приложений [6–8], в частности: в вопросах исследования нестационарного характера теплового слоя при пузырьковом кипении и турбулентном теплопереносе с помощью модели проникновения; при изучении процессов теплопроводности в рабочих лопатках газовых турбин в одномерном пространственном приближении; при исследовании температуры коры Земли, периодически нагреваемой Солнцем, в теории автоматических систем регулировки температуры; при теплопередаче через тонкую поверхностную пленку в условиях вынужденной конвекции или излучения и т.д.

Пусть $T(x,t)$ – температурное поле в Ω, $\Phi_0(x)$ – начальная температура, h – коэффициент теплообмена границы области со средой температуры $T_c = const.$ Введем безразмерные переменные

$$z = x/l, \tau = at/l^2, Bi = hl, f(z) = \frac{\Phi_0(x) - T_0}{T_c - T_0},\; W(z,\tau) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_c - T_0}, \tag{1}$$

где T_0, l – масштабные величины. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, z > 0, \tau > 0, \tag{2}$$

$$W(z,\tau)\big|_{\tau=0} = f(z), z \ge 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big|_{z=0} = BiW\big|_{z=0}, \tau > 0,\; \left|W(z,\tau)\right| < \infty, z \ge 0, \tau \ge 0. \tag{4}$$

Принципиальным моментом в развитии подхода является наличие в (4) однородного граничного условия. После построения интегрального преобразования, формулы обращения для него и изображения оператора справа в (2) указанное ограничение в (4) снимается. Предполагается также, что все функции в (1)–(4) достаточно гладкие и все формальные операции оправданы. Введем новую функцию

$$U(z,\tau) = W(z,\tau) - \frac{1}{Bi}\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z}. \tag{5}$$

Тогда имеем для функции $U(z,\tau)$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, z > 0, \tau > 0, \tag{6}$$

$$U(z,\tau)\Big|_{\tau=0} = f(z) - \frac{1}{Bi}\frac{df(z)}{dz}, z \ge 0 \tag{7}$$

$$U(z,\tau)\big|_{z=0} = 0, \tau > 0, \tag{8}$$

$$\left|U(z,\tau)\right| < \infty, z \ge 0, \tau \ge 0. \tag{9}$$

Операционный метод приводит к решению задачи (6)–(9) в виде:

$$U(z,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty f(z')\left\{\exp\left[-\frac{(z'-z)^2}{4\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(z'+z)^2}{4\tau}\right]\right\}dz' - \frac{1}{2Bi\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty \frac{df(z')}{dz'}\left\{\exp\left[-\frac{(z'-z)^2}{4\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(z'+z)^2}{4\tau}\right]\right\}dz' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty f(z')\left\{\exp\left[-\frac{(z'-z)^2}{4\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(z'+z)^2}{4\tau}\right]\right\}dz' + \frac{1}{2Bi\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty f(z')\left\{-\frac{(z'-z)}{2\tau}\exp\left[-\frac{(z'-z)^2}{4\tau}\right] + \frac{(z'+z)}{2\tau}\exp\left[-\frac{(z'+z)^2}{4\tau}\right]\right\}dz'. \tag{10}$$

Используем далее соотношения:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\frac{(z^{'}-z)^2}{4\tau}\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\xi^2\tau)\cos\xi(z^{'}-z)d\xi$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\frac{(z^{'}-z)}{2\tau}\exp\left[-\frac{(z^{'}-z)^2}{4\tau}\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \xi\exp(-\xi^2\tau)\sin\xi(z^{'}-z)d\xi\ .$$

Тогда решение (10) запишется в виде:

$$U(z,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(z^{'})dz^{'}\int_0^\infty \exp(-\xi^2\tau)\sin\xi z^{'}\sin\xi z d\xi+\frac{1}{Bi}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(z^{'})dz^{'}\int_0^\infty \xi\exp(-\xi^2\tau)\sin\xi z\cos\xi z^{'}d\xi \quad (11)$$

Находим из (5), учитывая (4):

$$W(z,\tau)=Bi\int_0^\infty U(z+y,\tau)\exp(-Biy)dy\,. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12) и вычисляя внутренние интегралы, находим:

$$W(z,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\xi^2\tau)\frac{\xi\cos\xi z+Bi\sin\xi z}{\left(Bi^2+\xi^2\right)^{1/2}}d\xi\times\int_0^\infty f(z^{'})\frac{\xi\cos\xi z^{'}+Bi\sin\xi z^{'}}{\left(Bi^2+\xi^2\right)^{1/2}}dz^{'}. \quad (13)$$

При $\tau = 0$ из (13) приходим к важному соотношению:

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi\cos\xi z+Bi\sin\xi z}{\left(Bi^2+\xi^2\right)^{1/2}}d\xi\int_0^\infty f(z^{'})\frac{\xi\cos\xi z^{'}+Bi\sin\xi z^{'}}{\left(Bi^2+\xi^2\right)^{1/2}}dz^{'}. \quad (14)$$

В этом соотношении ядро интегральной формулы есть

$$\Psi(\xi,z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\xi\cos\xi z+Bi\sin\xi z}{\left(Bi^2+\xi^2\right)^{1/2}}\right]. \quad (15)$$

Равенство (14) выражает следующую теорему: если

$$\overline{W}(\xi,\tau)=\int_0^\infty \Psi(\xi,z)W(z,\tau)dz \quad (16)$$

является интегральным преобразованием функции $W(z,\tau)$, то формула обращения для преобразования (16) имеет вид:

$$W(z,\tau)=\int_0^\infty \Psi(\xi,z)\overline{W}(\xi,\tau)d\xi. \quad (17)$$

При этом изображение оператора справа в уравнении (2) имеет вид:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\Psi(\xi,z)dz=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\left(Bi^2+\xi^2\right)^{1/2}}\left[\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z}-BiW(z,\tau)\right]_{\xi=0}-\xi^2\overline{W}(\xi,\tau). \quad (18)$$

Таким образом, получены все необходимые соотношения, а именно: интегральное преобразование (16), формула обращения для него (17) и изображение оператора второго порядка (18). Эти соотношения позволяют записать точное аналитическое решение третьей краевой задачи для уравнения (2) с заданными неоднородностями в виде функций общего вида как в самом уравнении, так и в краевых условиях (3)–(4).

Интегральную формулу (14) запишем в виде

$$f(z)=\int_0^\infty \Psi(\xi,z)d\xi\int_0^\infty f(z^{'})\Psi(\xi,z^{'})dz^{'} \quad (19)$$

и покажем ее справедливость иным подходом. Имеем:

$$\Psi(\xi,z)\Psi(\xi,z^{'})=\frac{2}{\pi}\frac{Bi\xi\sin\xi(z+z^{'})-Bi^2\cos\xi(z+z^{'})}{Bi^2+\xi^2}+\frac{2}{\pi}\cos\xi z\cos\xi z^{'}.$$

При этом:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Bi\xi\sin\xi(z+z')-Bi^2\cos\xi(z+z')}{Bi^2+\xi^2}d\xi=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Bi\xi\exp\left[i\xi(z+z')\right]}{Bi^2+\xi^2}d\xi-\frac{Bi^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left[i\xi(z+z')\right]}{Bi^2+\xi^2}d\xi=\frac{Bi}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left[i\xi(z+z')\right]}{\xi+iBi}d\xi=0,$$

если $Bi>0, z+z'>0$ [9].

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\infty}\Psi(\xi,z)d\xi\int_0^{\infty}f(z')\Psi(\xi,z')dz'=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(z')dz'\int_0^{\infty}\frac{Bi\xi\sin\xi(z+z')-Bi^2\cos(z+z')}{Bi^2+\xi^2}d\xi+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\xi zd\xi\int_0^{\infty}f(z')\cos\xi z'dz'=f(z). \quad (20)$$

В последнем равенстве использована теория интегралов Фурье [9]. Разумеется, что приведенными интегральными соотношениями (19)–(20) можно пользоваться лишь при условии, если $f(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(0, \infty)$ и когда интеграл

$$\int_0^{\infty}\left|f(z)\right|dz<\infty, \quad (21)$$

то есть абсолютно сходится.

Обратимся к решению задачи (2)–(4) в виде (13), имея в виду практическую направленность указанной задачи для многих приложений [3, 8]. Запишем (13) в виде:

$$W(z,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(z')dz'\int_0^{\infty}\exp(-\xi^2\tau)\frac{(\xi\cos\xi z+Bi\sin\xi z)(\xi\cos\xi z'+Bi\sin\xi z')}{Bi^2+\xi^2}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{\infty}f(z')\left\{\left[\exp(-\frac{(z-z')^2}{4\tau})+\exp(-\frac{(z+z')^2}{4\tau})\right]-Bi\exp\left[Bi^2\tau+Bi(z+z')\right]\Phi^*(\frac{z+z'}{2\sqrt{\tau}}+Bi\sqrt{\tau})\right\}dz'. \quad (22)$$

Рассмотрим в (22) случай, когда начальная температура в (3) постоянна $f(z)=W_0=const, z\ge 0$. Непосредственное применение приведенного интегрального преобразования для этого случая неприменимо, так как не выполняется условие (21) для начальной функции. Однако, соотношение (22) остается справедливым и для постоянной начальной функции, так как наличие ядер экспонент под знаком интеграла в (22) обеспечивает его сходимость. Находим:

$$\frac{W(z,\tau)}{W_0}=\Phi(\frac{z}{2\sqrt{\tau}})+\exp(Biz+Bi^2\tau)\Phi^*(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}+Bi\sqrt{\tau}). \quad (23)$$

Здесь: $\Phi^*(z)=1-\Phi(z), \Phi(z)-$ функция Лапласа $\Phi(z)=(2/\pi)\int_0^z\exp(-y^2)dy.$ Температура на поверхности твердого тела $W_p=W(0,\tau)$ находится из (23):

$$W_p/W_0=\exp(Bi^2\tau)\Phi^*(Bi\sqrt{\tau})=\frac{1}{Bi\sqrt{\pi\tau}}(1-\frac{1}{2Bi^2\tau}+\frac{3}{4Bi^4\tau^2}-.....) \quad (24)$$

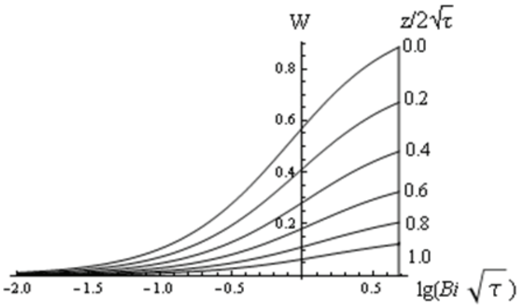
Отсюда следует, что по истечении значительного времени после начала охлаждения температуру поверхности можно считать равной $W_p=W_0/(Bi\sqrt{\pi\tau})$ с ошибкой меньшей, чем $W_0/\left[2Bi^3(\pi\tau^3)^{1/2}\right]$.

Для задачи с нулевой начальной температурой $\Phi_0(x)=0 (x\ge 0)$, нагреваемой вследствие теплообмена на границе области со средой температуры $T_c=const$, решение в переменных (z, τ) находится в виде:

$$W(z,\tau)=\Phi^*(\frac{z}{2\sqrt{\tau}})-\exp(Biz+Bi^2\tau)\Phi^*(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}+Bi\sqrt{\tau}).$$

Это решение можно выразить в виде функции любых двух из следующих безразмерных параметров: $z/2\sqrt{\tau}, Bi\sqrt{\tau}, Biz$. Любая из выбранных пар обладает своим преимуществом.

На рисунке представлен график зависимости $W(z,\tau)$ от $\lg(Bi\sqrt{\tau})$ для величин $z/2\sqrt{\tau}$, равных 0; 0.1;…….1.5. Указанный подход для численных экспериментов на основе приведенных соотношений весьма удобен для описания кинетики процесса наглядным образом.



Распределение температуры в твердом теле (область Ω) при теплообмене на его поверхности.

Важным теоретическим вопросом, имеющим многочисленные практические приложения, является нахождение интегрального представления аналитических решений общей задачи вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + F(x,t), x>0, t>0, \tag{25}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = \Phi_0(x), x \ge 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = h\left[T(x,t) - \varphi(t)\right]\Big|_{x=0}, t>0, \tag{27}$$

$$\left|T(x,t)\right| < \infty, x \ge 0, t \ge 0. \tag{28}$$

Используя подход, развитый автором в [3], найдем интегральное представление для *T (x,t)* в виде:

$$T(x,t) = \int_0^\infty \Phi_0(x')G(x,x',t)dx' + ah\int_0^t \varphi(\tau)G(x,x',t-\tau)\Big|_{x'=0}d\tau + \int_0^t\int_0^\infty F(x',\tau)G(x,x',t-\tau)d\tau dx'. \tag{29}$$

Здесь $G(x,x',t-\tau)$ – функция Грина для третьей краевой задачи, удовлетворяющая условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, x>0, t>\tau, \tag{30}$$

$$G(x,x',t-\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(x-x'), (x,x')>0, \tag{31}$$

$$(\partial G/\partial x - hG)\big|_{x=0} = 0, t>\tau, \tag{32}$$

$$\left|G(x,x',t-\tau)\right| < \infty, x>0, t>\tau. \tag{33}$$

Здесь $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака. Интегральные преобразования (16)–(18) и соотношение (22) приводят к следующему выражению для функции Грина:

$$G(x,x',t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4a(t-\tau)}\right]\right\} - \\ -h\exp\left[ah^2(t-\tau) + h(x+x')\right]\Phi^*\left(\frac{x+x'}{2\sqrt{a(t-\tau)}} + h\sqrt{a(t-\tau)}\right). \tag{34}$$

Соотношение (29) может быть использовано в численных экспериментах для многих частных случаев краевых функций в виде импульсных, пульсирующих, периодических, апериодических, кусочно-постоянных и других тепловых нагрузок в исходной постановке третьей краевой задачи (25)–(28). Разумеется, при нахождении соответствующего аналитического решения задачи может быть использован каждый из приведенных подходов, и выбор метода решения определяется лишь удобством вычислительной схемы.

Выводы

Изложен новый математический подход построения интегрального преобразования и формулы обращения для него для третьей краевой задачи нестационарной теплопроводности в области с непрерывным спектром собственных значений. Рассмотрена серия аналитических решений в различных эквивалентных функциональных формах. Развит метод функций Грина для записи аналитических решений третьей краевой задачи, содержащей в исходной постановке краевые функции общего вида.

Список литературы:

1. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Изв.РАН. Энергетика. 1993. № 2. С. 99–127.
2. Карташов Э.М. Расчет температурных полей в твердых телах на основе улучшенной сходимости рядов Фурье-Ханкеля // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 3. С. 106–125.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов Э.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 228 с.
6. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 653 с.
7. Карташов Э.М., Михайлова Н.А. Интегральные соотношения для аналитических решений обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности // Вестник МИТХТ. 2011. Т. 6. № 3. С. 106–110.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
9. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. литер., 1955. 667 с.

References:

1. Kartashov E.M. The method of integral transformations in the analytic theory of the thermal conductivity of solids // Izvestiya RAN. Energetika (Bulletine of RAS. Power Engineering). 1993. № 2. P. 99–127. (in Russ.).
2. Kartashov E.M. Calculation of temperature fields in solids based on improved convergence of Fourier-Hankel series // Izvestiya RAN. Energetika (Bulletine of RAS. Power Engineering). 1993. № 3. P. 106–125. (in Russ.).
3. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. M.: Vysshaya shkola Publ., 2001. 540 p. (in Russ.).
4. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov E.M. Equations in partial derivatives of mathematical physics. M.: Vysshaya shkola Publ., 1970. 710 p. (in Russ.).
5. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral transformations and operational calculus. M.: N.E. Bauman MGTU Publ., 1996. 228 p. (in Russ.).
6. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical theory of heat conductivity and applied thermoelasticity. M.: URSS Publ., 2012. 653 p. (in Russ.).
7. Kartashov E.M., Mikhailova N.A. Integral relations for analytic solutions of the generalized equation of nonstationary heat conductivity // Vestnik MITHT (Fine Chem. Technologies). 2011. V. 6. № 3. P. 106–110. (in Russ.).
8. Carslow G.G., Eger D. Thermal conductivity of solids. M.: Nauka Publ., 1964. 487 p. (in Russ.).
9. Sneddon I. Fourier transformations. Moscow: Publ. of Foreign Liter., 1955. 667 p. (in Russ.).

Об авторе:

Карташов Эдуард Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).