

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой, Н.А. Михайлова, старший преподаватель

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова
e-mail: kartashov@mitht.ru

Построены интегральные соотношения для аналитических решений обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат для ограниченных областей канонического типа. Развита теория интегральных преобразований и метод функций Грина.

The integral correlations for analytical solutions to the generalized equation of transient heat conduction simultaneously in the Cartesian coordinate grid, cylindrical and spherical coordinate systems for the limited fields of the canonical type were constructed. The theory of integral transformations and the method of Green's functions were developed.

Ключевые слова: краевые нестационарная теплопроводность, обобщенное уравнение, краевые задачи, функции Грина.

Key words: unsteady heat conduction; generalized equation; boundary value problems; Green's functions.

Метод интегральных преобразований, развитый в [1], незаменим при нахождении аналитических решений краевых задач нестационарного переноса в областях канонического типа (пластина, цилиндр, шар). Его основные достоинства – сведение вычислений к несложным алгоритмическим преобразованиям на основе определения интегрального преобразования, изображения оператора Лапласа, формулы обращения. Близким к этому методу является метод функций Грина [1], в котором

участвуют две составляющие: вывод интегрального соотношения для записи аналитических решений краевых задач через функцию Грина и неоднородности в исходной постановке задачи и, собственно, нахождение самой функции Грина. Оба подхода дополняют друг друга. Несмотря на достигнутые успехи в этой области, ряд вопросов остается еще открытым. Один из них – развитие указанных методов для решения краевых задач на основе обобщенного уравнения вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad \begin{matrix} 0 \leq x < R \left(m = 0; \frac{1}{2} \right), \\ 0 < x < R \left(m = -\frac{1}{2} \right), \end{matrix} \quad (1)$$

$t > 0$.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T(x, t)|_{x=R} = \varphi(t), \quad t > 0; \quad (3)$$

тепловой нагрев

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=R} = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \varphi(t), \quad t > 0; \quad (4)$$

нагрев средой

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=R} = -h \left[T(x, t)|_{x=R} - \varphi(t) \right], \quad t > 0.$$

Функция Грина $G(x, x', t, \tau)$ по переменным (x, t) следует определить как решение задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right), \quad \begin{matrix} 0 \leq x < R \left(m = 0; \frac{1}{2} \right), \\ 0 < x < R \left(m = -\frac{1}{2} \right), \end{matrix} \quad (6)$$

$t > \tau,$

При $m = -\frac{1}{2}$ рассматривается бесконечная пластина, при $m = 0$ – сплошной (неограниченный) цилиндр, при $m = \frac{1}{2}$ – шар. Так как для $m = 0; \frac{1}{2}$ должны выполняться условия $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad t > 0$, то присоединим к этим условиям $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, при $m = -\frac{1}{2}$ с тем, чтобы охватить теорией все три случая в (1) одновременно.

Итак, пусть в $D = (0 < x < R, t > 0)$ заданы:

начальное условие

$$T(x, t)|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad 0 \leq x \leq R; \quad (2)$$

и одно из следующих граничных условий (при $x = R$):

температурный нагрев

$$G \Big|_{t=\tau} = \frac{1}{x^{2m+1}} \delta(x-x'), \quad 0 < (x, x') < R, \quad (7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\beta_1 \frac{\partial G}{\partial x} + \beta_2 G \right) \Big|_{x=R} = 0, \quad t > \tau, \quad (8)$$

а по переменным (x', τ) следующим образом:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + a \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x'^2} + \frac{2m+1}{x'} \cdot \frac{\partial G}{\partial x'} \right) = 0, \quad \begin{matrix} 0 \leq x' < R \left(m=0; \frac{1}{2} \right), \\ 0 < x' < R \left(m=-\frac{1}{2} \right), \end{matrix} \quad \tau < t, \quad (9)$$

$$G \Big|_{\tau=t} = \frac{1}{x'^{2m+1}} \delta(x'-x), \quad 0 < (x', x) < R, \quad (10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = 0, \quad \left(\beta_1 \frac{\partial G}{\partial x'} + \beta_2 G \right) \Big|_{x'=R} = 0, \quad \tau < t. \quad (11)$$

В (8) и (11) $\beta_1=0, \beta_2=1$ для случая (3); $\beta_1=1, \beta_2=0$ для случая (4); $\beta_2/\beta_1=-h$ для случая (5); в (7) и (10) $\delta(z)$ – дельта функция Дирака [1].

В дальнейшем удобнее оператор ΔT справа в (1) записывать в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{x^{2m+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{2m+1} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [T(x', \tau) G(x, x', t, \tau)] &= G \frac{\partial T}{\partial \tau} + T \frac{\partial G}{\partial \tau} = \\ &= \frac{a}{x'^{2m+1}} \left[G \frac{\partial}{\partial x'} \left(x'^{2m+1} \frac{\partial T}{\partial x'} \right) - T \frac{\partial}{\partial x'} \left(x'^{2m+1} \frac{\partial G}{\partial x'} \right) \right] + Gf. \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим обе части (13) на x'^{2m+1} и проинтегрируем по $x' \in (0, R)$.

$$\begin{aligned} \int_0^R x'^{2m+1} \frac{\partial}{\partial \tau} (TG) dx' &= a \int_0^R \left[G \frac{\partial}{\partial x'} \left(x'^{2m+1} \frac{\partial T}{\partial x'} \right) - T \frac{\partial}{\partial x'} \left(x'^{2m+1} \frac{\partial G}{\partial x'} \right) \right] dx' + \int_0^R x'^{2m+1} Gf dx' = \\ &= aR^{2m+1} \left(G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=R} + \int_0^R x'^{2m+1} Gf dx'. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношение (14) справедливо при всех $\tau < t$ и, следовательно, его можно проинтегрировать по τ для $0 < \tau < t - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число (при $0 < \tau < t - \varepsilon$ подинтегральная функция слева достаточна регулярна, так как исключена особенность у функции G в точке $x' = x$ при $\tau = t$). Получим:

$$\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_0^R x'^{2m+1} \frac{\partial}{\partial \tau} (TG) dx' = aR^{2m+1} \int_0^{t-\varepsilon} \left(G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=R} d\tau + \int_0^{t-\varepsilon} \int_0^R x'^{2m+1} Gf d\tau dx'.$$

Вынося, слева оператор $(\partial/\partial \tau)$ за знак определенного интеграла, находим

$$\begin{aligned} \int_0^R x'^{2m+1} (TG)_{\tau=t-\varepsilon} dx' &= \int_0^R x'^{2m+1} (TG)_{\tau=0} dx' + aR^{2m+1} \int_0^{t-\varepsilon} \left(G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=R} d\tau + \\ &+ \int_0^{t-\varepsilon} \int_0^R x'^{2m+1} Gf d\tau dx'. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$; учитывая (10) и равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^R x'^{2m+1} [T(x', t - \varepsilon) \cdot G(x, x', t, \tau)]_{\tau=t-\varepsilon} dx' = \int_0^R T(x', t) \delta(x' - x) dx' = T(x, t),$$

получим искомое интегральное соотношение для аналитических решений обобщенного уравнения (1) с краевыми условиями (2)-(5):

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_0^R x'^{2m+1} T(x', 0) G(x, x', t) dx' + \\ &+ aR^{2m+1} \int_0^t \left[G(x, x', t - \varepsilon) \frac{\partial T(x', \tau)}{\partial x'} - T(x', \tau) \frac{\partial G(x, x', t - \tau)}{\partial x'} \right] \Big|_{x'=R} d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^R x'^{2m+1} G(x, x', t - \tau) f(x', \tau) d\tau dx'. \end{aligned} \quad (15)$$

Развитый подход допускает в (1) и (4) зависимости коэффициентов теплопроводности и теплопроводности от времени $a = a(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, где $a(t)$ и $\lambda(t)$ неотрицательные кусочно-гладкие функции в области $t \in [0; \infty]$. Этот случай представляет большой интерес для многих

практических приложений и описан в [1–2]. С учетом зависимости $a(t)$ второе слагаемое в (15) записывается следующим образом: $R^{2m+1} \int_0^t a(\tau) \left(G \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial G}{\partial x'} \right)_{x'=R} d\tau$. Зависимость $\lambda(t)$ в граничном условии (4) автоматически войдет в интегральное соотношение (15).

Следующий этап исследований – построение интегральных преобразований для обобщенного уравнения (1) на основе теории спектральных задач, развитой в [1].

Пусть $\psi(\gamma x)$ – собственные функции спектральной задачи, удовлетворяющие уравнению Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{d\psi}{dx} + \gamma^2 \psi = 0, \quad \begin{aligned} 0 \leq x < R \quad (m=0; 1/2), \\ 0 < x < R \quad (m=-1/2), \end{aligned} \quad (16)$$

γ – собственные значения.

Перепишав (16) в виде: $\frac{d}{dx} \left(x^{2m+1} \frac{d\psi}{dx} \right) + \gamma^2 x^{2m+1} \psi = 0$ убеждаемся, в том, что система функций

$\{\psi(\gamma_n x)\}$ в области $x \in [0, R]$ ортогональна с весом $P(x) = x^{2m+1}$. Если присоединить к уравнению (16) граничные условия

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=R} = 0 \quad \text{в случае (3),} \quad (17)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=R} = 0 \quad \text{в случае (4),} \quad (18)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=R} = -h\psi|_{x=R} \quad \text{в случае (5),} \quad (19)$$

то на основании решения сформулированных спектральных задач, найдем собственные функции и собственные значения:

в случае (3)

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) &= x^{-m} J_m \left(\mu_n \frac{x}{R} \right), \\ \mu_n > 0 - \text{корни уравнения } J_m(\mu) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

в случае (4)

$$\left. \begin{aligned} \psi_2 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) &= \begin{cases} x^{-m} J_m \left(\mu_n \frac{x}{R} \right), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \\ \mu_0 = 0, \mu_n > 0 (n \geq 1) - \text{корни уравнения } J_{m+1}(\mu) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

в случае (5)

$$\left. \begin{aligned} \psi_3 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) &= x^{-m} J_m \left(\mu_n \frac{x}{R} \right), \\ \mu_n > 0 - \text{корни уравнения } \frac{J_m(\mu)}{J_{m+1}(\mu)} &= \frac{\mu}{nR}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для вычисления квадрата нормы собственных функций используем важный интеграл, полученный специально для этой цели

$$\int_0^R x J_m^2(\gamma x) dx = \left\{ \frac{x^2}{2} \left[J_m^2(\gamma x) - \frac{2m}{\gamma x} J_m(\gamma x) J_{m+1}(\gamma x) + J_{m+1}^2(\gamma x) \right] \right\}_{x=0}^{x=R}. \quad (23)$$

Теперь с учетом (20) – (22) находим из (23):

$$\left. \begin{aligned} \left\| \psi_1 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \right\|^2 &= \left(\frac{R^2}{2} \right) J_{m+1}^2(\mu_n), \\ \left\| \psi_2 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \right\|^2 &= \begin{cases} \left(\frac{R^2}{2} \right) J_m^2(\mu_n), & n \geq 1, \\ \frac{R^{2(m+1)}}{2(m+1)}, & n = 0, \end{cases} \\ \left\| \psi_3 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \right\|^2 &= \frac{R^2}{2} \cdot \frac{J_m^2(\mu_n)}{\mu_n^2} \left[\mu_n^2 - 2hRm + (hR)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Таким образом, вся необходимая информация для построения интегральных преобразований для обобщенного уравнения (1) получена.

Находим:

1. Интегральное преобразование (граничные условия (3))

$$\bar{T}(\mu_n, t) = \int_0^R x^{2m+1} \psi_1 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) T(x, t) dx, \quad (25)$$

изображение оператора

$$\int_0^R x^{2m+1} \psi_1 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = R^m \mu_n J_{m+1}(\mu_n) T(x, t) \Big|_{x=R} - \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2 \bar{T}(\mu_n, t), \quad (26)$$

формула обращения

$$T(x, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_1 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right)}{J_{m+1}^2(\mu_n)} \bar{T} \left(\mu_n \frac{x}{R} \right); \quad (27)$$

2. Интегральное преобразование (граничные условия (4))

$$\bar{T}(\mu_n, t) = \int_0^R x^{2m+1} \psi_2 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) T(x, t) dx, \quad (28)$$

изображение оператора

$$\int_0^R x^{2m+1} \psi_2 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = R^{m+1} J_m(\mu_n) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=R} - \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2 \bar{T}(\mu_n, t), \quad (29)$$

формула обращения

$$T(x, t) = \frac{2(m+1)}{R^{2(m+1)}} \bar{T}(\mu_0, t) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_2 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right)}{J_m^2(\mu_n)} \bar{T}(\mu_n, t); \quad (30)$$

3. Интегральное преобразование (граничные условия (5))

$$\bar{T}(\mu_n, t) = \int_0^R x^{2m+1} \psi_3 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) T(x, t) dx, \quad (31)$$

изображение оператора

$$\int_0^R x^{2m+1} \psi_3 \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = R^{-m} J_m(\mu_n) \left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + hT(x, t) \right] \Big|_{x=R} - \left(\frac{\mu_n}{R} \right) \bar{T}(\mu_n, t) \quad (32)$$

формула обращения

$$T(x, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \psi_3\left(\mu_n \frac{x}{R}\right)}{J_m^2(\mu_n) [\mu_n^2 - 2hRm + (hR)^2]} \bar{T}(\mu_n, t). \quad (33)$$

Имея интегральные преобразования (25) – (33), несложно записать функции Грина $G(x, x', t - \tau)$, путем решения задачи (6) – (8).

$$G(x, x', t - \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{R}\right)^2 (t - \tau)\right] \psi_1\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \psi_1\left(\mu_n \frac{x'}{R}\right)}{J_{m+1}^2(\mu_n)}, \quad (34)$$

$$G(x, x', t - \tau) = \frac{2(m+1)}{R^{2(m+1)}} + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{R}\right)^2 (t - \tau)\right] \psi_2\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \psi_2\left(\mu_n \frac{x'}{R}\right)}{J_m^2(\mu_n)}, \quad (35)$$

$$G(x, x', t - \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{a}\mu_n}{R}\right)^2 (t - \tau)\right] \psi_3\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \psi_3\left(\mu_n \frac{x'}{R}\right)}{J_m^2(\mu_n) [\mu_n^2 - 2hRm + (hR)^2]}. \quad (36)$$

Всякий случай построения функций Грина весьма важен для практических расчетов, так как позволяет автоматически записать аналитические решения краевых задач (1) – (5) при заданных неоднородностях с помощью интегрального соотношения (15). Наличие обобщенного решения для тел канонической формы поз-

воляет изучить важную проблему нестационарного теплообмена: влияния геометрической формы тела на кинетику процесса.

Дальнейшее развитие теории – переход к области $0 < R_1 < x < R_2$, $t > 0$, что предполагается в дальнейшей публикации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами: аналит. обзор, посвященный 275-летию РАН // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–35.