

ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой

кафедра Высшей и прикладной математики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: kartashov@mitht.ru

Развит метод оценок решений краевых задач теплопроводности обобщенного типа.
An estimation method was developed for solutions of boundary problems of thermal conductivity of the generalized type.

Ключевые слова: краевые задачи, движущиеся границы, аналитические решения, оценки решений.

Key words: boundary problems, moving boundaries, analytical solutions, evaluating solutions.

Пусть $\Omega_{t_0} = D \times (0, t_0] = \{(x, t) : 0 < x, y(t), 0 < t \leq t_0\}$ – нецилиндрическая область в фазовом пространстве (x, t) ; $y(t) > 0$ непрерывно-дифференцируемая функция, $y(0) = y_0 > 0$; $S_{t_0}^1 = (x = 0, 0 < t \leq t_0)$, $S_{t_0}^2 = (x = y(t), 0 < t \leq t_0)$, $G_0 = (0 \leq x \leq y_0)$. Через $\tilde{A}_{t_0}$ обозначим сумму боковой поверхности и нижнего основания области Ω_{t_0} : $\tilde{A}_{t_0} = S_{t_0}^1 + S_{t_0}^2 + G_0$.

В области $\overline{\Omega}_{t_0}$ рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_{t_0}, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \in G_0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h_1(t) [T(x, t)|_{x=0} - \varphi_1(t)], \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=y(t)} = -h_2(t) [T(x, t)|_{x=y(t)} - \varphi_2(t)], \quad (4)$$

$$t \geq 0.$$

Здесь: $h_i(t) > 0$ ($i = 1, 2$), $h_1^2 + h_2^2 > 0$, $h_i(t) \in C^0(t \geq 0)$ ($i = 1, 2$); $\varphi_i(t) \in C^0(t \geq 0)$ ($i = 1, 2$); $\Phi_0(x) \in C^1(G_0)$; $F(x, t) \in C^0(\Omega_{t_0})$.

При этом $T(x, t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\overline{\Omega}_{t_0})$, $\text{grad}_x T(x, t) \in C^0(\overline{\Omega}_{t_0})$.

Входящие в (1) – (4) функции рассматриваются в классах из предположения выполнения условий согласования:

$$\left. \frac{d\Phi_0(x)}{dx} \right|_{x=0} = h_1(0) [\Phi_0(x)|_{x=0} - \varphi_1(0)], \quad (5)$$

$$\left. \frac{d\Phi_0(x)}{dx} \right|_{x=y_0} = -h_2(0) [\Phi_0(x)|_{x=y_0} - \varphi_2(0)]$$

Без выполнения условий (5) – (6) начальное

условие (2) задаётся в точках G_0 , а граничные (3) – (4) при $t > 0$. Тогда краевые функции исходной задачи принадлежат классу: $\Phi_0(x) \in C^0(G_0)$, $\varphi_i(t) \in C^0(t > 0)$ ($i = 1, 2$), $F(x, t) \in C^0(\Omega_{t_0})$. При этом $T(x, t) \in C^2(\Omega_{t_0})$ и не является в общем случае непрерывной вплоть до границы области определения уравнения (1). Следует заметить, что краевые задачи в последнем случае являются достаточно многочисленными для потребностей практики, решаются теми же аналитическими методами, имеют ту же аналитическую форму решения и различия лишь в поведении решений в окрестности граничных точек. Это обстоятельство несколько затрудняет числовые расчеты по найденным (конкретным) решениям в окрестности граничных точек и для ограниченных цилиндрических областей канонического типа (пластина, цилиндр, шар) ($y(t) = l = \text{const}$, $t \geq 0$, $\Omega_{t_0} = (0 < x < l, 0 < t \leq t_0)$ ряды Фурье – Ханкеля в качестве решений могут расходиться в $\tilde{A}_{t_0}$. С

этой целью автором в [1–3] разработаны специальные таблицы, улучшающие сходимость указанных рядов до абсолютной и равномерной вплоть до границы области Ω_{t_0} . Новые (модифицированные) решения при этом отличаются от известных классических аналитических решений [4] и являются весьма удобными для числовых расчетов при рассмотрении многих практических вопросов (расчеты теплофизических констант на основе решения обратных задач; определение времени прогрева детали канонической формы; описание кинетики средних интегральных температур и др.).

Характерной особенностью рассматриваемой задачи (1) – (6) является наличие движущейся границы $x = y(t)$ и зависимости от времени относительных коэффициентов теплообмена $h_i(t)$. Подобные задачи возникают в многочисленных проблемах науки и техники, указанных в [1–3, 5]. Наличие указанных вре-

менных зависимостей не позволяет получить точные аналитические решения такого рода задач, так как не удаётся согласовать решение уравнения (1) с движением границы и граничными условиями (3) – (4). Попытки осуществить такое согласование приводят к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра 2 рода, решение которой не представляется возможным. Однако есть другой путь получения информации о температурном состоянии области Ω_{t_0} в (1) – (4), основанный на применении принципа максимума для линейных уравнений параболического типа [6], суть которого в получении априорных оценок снизу и сверху для температурной функции $T(x, t)$, удовлетворяющей (1) – (4), без необходимости решения краевой задачи. Этот подход рассмотрен ниже.

В (1) – (4) перейдём к новой функции $U(x, t)$ с помощью соотношения $T(x, t) = U(x, t)\exp(\lambda t)$, где $\lambda > 0$ – произвольное число. Получим для функции $U(x, t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\lambda U + F(x, t)\exp(-\lambda t), \quad (7)$$

$$(x, t) \in \Omega_{t_0},$$

$$U(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \in G_0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = h_1(t) [U|_{x=0} - \varphi_1(t)\exp(-\lambda t)], \quad (9)$$

$$t \geq 0,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=y(t)} =$$

$$= -h_2(t) [U|_{x=y(t)} - \varphi_2(t)\exp(-\lambda t)], \quad (10)$$

$$t \geq 0.$$

Возьмём произвольное $t_1 \in (0, t_0)$. Возможны три случая: функция $U(x, t) \leq 0$ в $\bar{\Omega}_{t_1}$; наибольшее положительное значение $U(x, t)$ в $\bar{\Omega}_{t_1}$ принимает на $\tilde{A}_{t_1}$; наибольшее положительное значение $U(x, t)$ принимает в какой-либо точке $(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \in \Omega_{t_1}$. В первом случае имеем: $\max_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \leq 0$. Во втором: $0 < \max_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \leq \max_{\tilde{A}_{t_1}} U(x, t)$. При этом, если точка максимума принадлежит $S_{t_1}^2$, то в ней $(\partial U / \partial x) \geq 0$ и из граничного условия (10) находим: $U(x, t)|_{S_{t_1}^2} \leq \max[\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)]$; если точка максимума принадлежит $S_{t_1}^1$, то в ней $(\partial U / \partial x) \leq 0$ и

граничное условие (9) даёт оценку $U(x, t)|_{S_{t_1}^1} \leq \max[\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)]$. Таким образом, во втором случае имеем:

$$\max_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \leq \max \left\{ \max_{S_{t_1}^1} [\max \varphi_1(t)\exp(-\lambda t)], \max_{S_{t_1}^2} [\max \varphi_2(t)\exp(-\lambda t)], \max_{G_0} \Phi_0(x) \right\}.$$

В третьем случае в точке максимума $(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0)$ выполняется соотношение $U'_t \geq 0$, $U''_{xx} \leq 0$, так что $U'_t - aU''_{xx} \geq 0$. Из уравнения (7) (которое выполняется в этой точке) находим:

$$0 < \max_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \leq U(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \leq (1/\lambda)F(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0)\exp(-\lambda \tilde{t}_0) \leq (1/\lambda)\max_{\Omega_{t_1}} [F(x, t)\exp(-\lambda t)]$$

Объединяя все эти три случая и переходя к функции $T(x, t)$, находим для любого $t_1 \in (0, t_0)$ следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} T(x, t_1) \leq \max \left\{ 0; \max_{S_{t_1}^1} [\varphi_1(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \right. \\ \max_{S_{t_1}^2} [\varphi_2(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \\ \max_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)]; \\ \left. (1/\lambda)\max_{\Omega_{t_1}} [F(x, t)\exp \lambda(t_1 - t)] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдём к нахождению оценки снизу. Здесь также возможны три случая. Функция $U(x, t) \geq 0$ в $\bar{\Omega}_{t_1}$; наименьшее отрицательное значение $U(x, t)$ в $\bar{\Omega}_{t_1}$ принимает на $\tilde{A}_{t_1}$; наименьшее отрицательное значение $U(x, t)$ принимает в какой-либо точке $(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \in \Omega_{t_1}$. В первом случае $\min U(x, t) \geq 0$ при $(x, t) \in \bar{\Omega}_{t_1}$; во втором $0 > \min_{\bar{\Omega}_{t_1}} U(x, t) \geq \min_{\tilde{A}_{t_1}} U(x, t)$. При этом, если точка минимума принадлежит $S_{t_1}^2$, то в ней $(\partial U / \partial x) \leq 0$ и граничное условие (10) даёт оценку $U(x, t)|_{S_{t_1}^2} \geq \min[\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)]$; если точка минимума принадлежит $S_{t_1}^1$, то в ней $(\partial U / \partial x) \geq 0$ и из граничного условия (9) находим $U(x, t)|_{S_{t_1}^1} \geq \min[\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)]$. Таким образом, во втором случае имеем:

$$\min_{\bar{\Omega}_{t_1}} U(x, t) \geq \min \left\{ \min[\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)]; \min[\varphi_2(t)\exp(-\lambda t)]; \min_{G_0} \Phi_0(x) \right\}.$$

В третьем случае в точке минимума $(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0)$ выполняется соотношение $U'_t \leq 0$, $U''_{xx} \geq 0$, так что $U'_t - aU''_{xx} \leq 0$ и находим из уравнения (7) (которое выполняется в этой точке) неравенство $0 > \min_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \geq U(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0) \geq$

$$\geq (1/\lambda)F(\tilde{x}_0, \tilde{t}_0)\exp(-\lambda t_0) \geq \\ \geq (1/\lambda)\min_{\Omega_{t_1}} [F(x, t)\exp(-\lambda t)]$$

Объединяя все эти три случая и переходя к функции $T(x, t)$, находим для любого $t_1 \in (0, t_0)$ следующую оценку снизу:

$$T(x, t_1) \geq \min \left\{ 0; \min_{S^1_{t_1}} [\varphi_1(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \right. \\ \min_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \\ \min_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)]; \\ \left. (1/\lambda)\min_{\Omega_{t_1}} [F(x, t)\exp \lambda(t_1 - t)] \right\}. \quad (12)$$

Выражения (11) и (12) дают для $T(x, t)$ множество нижних и верхних оценок, каждая из которых зависит от введенного числа $\lambda > 0$. Если эти множества оказываются ограниченными сверху и снизу (при выбранном интервале значений $\lambda > 0$), то они будут иметь точную верхнюю $\sup\{\}$ и точную нижнюю $\inf\{\}$ границы. Таким образом, окончательно для решения задачи (1) – (4) при любом $t_1 \in (0, t_0)$ справедливы оценки:

$$\sup_{\lambda > 0} \min \left\{ 0; \min_{S^1_{t_1}} [\varphi_1(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \right. \\ \min_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \\ \min_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)]; \\ \left. (1/\lambda)\min_{\Omega_{t_1}} [F(x, t)\exp \lambda(t_1 - t)] \right\} \leq \\ T(x, t_1) \leq \inf_{\lambda > 0} \left\{ 0; \max_{S^1_{t_1}} [\varphi_1(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \right. \\ \max_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t)\exp \lambda(t_1 - t)]; \\ \max_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)]; \\ \max_{G_0} [\Phi_0(x)\exp(\lambda t_1)]; \\ \left. (1/\lambda)\max_{\Omega_{t_1}} [F(x, t)\exp \lambda(t_1 - t)] \right\}. \quad (13)$$

В неравенствах (13) предполагается, что функция источника $F(x, t) > 0$; если в (1) – (4) задан тепловой сток $F(x, t) < 0$, то функция $U(x, t)$ вводится соотношением $T(x, t) =$

$U(x, t)\exp(-\lambda t)$ и все рассуждения полностью повторяются. Если уравнение (1) однородное, то есть $F(x, t) = 0$, то применяя к этому случаю принцип максимума [1], можно записать для любого $t_1 \in (0, t_0)$: $\min_{\Omega_{t_1}} T(x, t) \leq T(x, t_1) \leq \max_{\tilde{A}_{t_1}} T(x, t)$ или более подробно

$$\min \left\{ \min_{S^1_{t_1}} \varphi_1(t); \min_{S^2_{t_1}} \varphi_2(t); \right. \\ \min_{G_0} \Phi_0(x) \left. \right\} \leq T(x, t_1) \leq \\ \max \left\{ \max_{S^1_{t_1}} \varphi_1(t); \max_{S^2_{t_1}} \varphi_2(t); \right. \\ \max_{S^2_{t_1}} \varphi_2(t); \max_{G_0} \Phi_0(x) \left. \right\}$$

Неравенства (13) справедливы и для первой краевой задачи (в (3) – (4) $1/h_i = 0$). В случае второй краевой задачи (для определённости – тепловой нагрев) для уравнения (1) с начальным условием (2) и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\varphi_1(t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=y(t)} = \varphi_2(t), \quad t \geq 0. \quad (15)$$

функция $U(x, t)$ вводится соотношением $T(x, t) = U(x, t)\exp(\lambda x + \beta t)$, где $\lambda > 0$, $\beta > 0$ – пока произвольные числа. Имеем для функции $U(x, t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\lambda a \frac{\partial U}{\partial x} - (\beta - a\lambda^2)U + \quad (16)$$

$$+ F(x, t)\exp(-\lambda x - \beta t), \quad 0 \leq x \leq y(t), \quad 0 < t \leq t_0,$$

$$U(x, 0) = \Phi_0(x)\exp(-\lambda x), \quad (17)$$

$$0 \leq x \leq y(0) = y_0 > 0,$$

$$\left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\varphi_1(t)\exp(-\beta t) - \lambda U(0, t), \quad (18)$$

$$t \geq 0,$$

$$\left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=y(t)} = \varphi_2(t)\exp[-\lambda y(t) - \beta t] - \quad (19)$$

$$-\lambda U(y(t), t), \quad t \geq 0.$$

Как и выше, при отыскании оценки сверху рассматриваем три случая. В первом случае $\max_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \leq 0$; во втором анализируем возможное расположение точки положительного максимума. На $S^1_{t_1}$ имеет место $(\partial U/\partial x) \leq 0$ и из (18) находим:

$$U(x, t) \geq \max [(-1/\lambda)\varphi_1(t)\exp(-\lambda t)];$$

на $S^2_{t_1}$ выполняется $(\partial U/\partial x) \geq 0$ и (19) даёт

$$U(x, t) \leq \max [(1/\lambda)\varphi_2(t)\exp(-\lambda y(t) - \beta t)]; \quad \text{в тре-}$$

тем случае в точке максимума $(\partial U / \partial x) = 0$, $U'_t - aU''_{xx} \geq 0$ и уравнение (16) даёт оценку

$U(x, t) \leq \max \left\{ F(x, t) / (\beta - a\lambda^2) \right\} \exp(-\lambda x - \beta t)$ ($\beta > a\lambda^2$). Переходя к нахождению оценки снизу в первом случае $\min_{\Omega_{t_1}} U(x, t) \geq 0$ и далее анализируем возможное расположение точки отрицательного минимума. На $S^1_{t_1}$ имеем $(\partial U / \partial x) \geq 0$ и из (18) находим:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ 0; \exp(\lambda x) \max_{S^1_{t_1}} [(-1/\lambda)\varphi_1(t) \exp \beta(t_1 - t)]; (1/\lambda) \exp(\lambda x) \min_{S^2_{t_1}} [\varphi_2(t) \exp(\beta(t_1 - t) - \lambda y(t))] \right\} \\ & \exp(\lambda x + \beta t_1) \min [\Phi_0(x) \exp(-\lambda x)]; \frac{1}{\beta - a\lambda^2} \exp(\lambda x) \min [F(x, t) \exp(-\lambda x + \beta(t_1 - t))] \Big\} \leq \\ & \leq T(x, t_1) \leq \max \left\{ 0; \exp(\lambda x) \min_{S^1_{t_1}} [(-1/\lambda)\varphi_1(t) \exp \beta(t_1 - t)]; \right. \\ & \exp(\lambda x) \max_{S^2_{t_1}} [(1/\lambda)\varphi_2(t) \exp(\beta(t_1 - t) - \lambda y(t))]; \exp(\lambda x + \beta t_1) \max_{G_0} [\Phi_0(x) \exp(-\lambda x)]; \\ & \left. \frac{1}{\beta - a\lambda^2} \exp(\lambda x) \max_{\Omega_1} [F(x, t) \exp(-\lambda x - \beta(t_1 - t))] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\beta > a\lambda^2$, $\lambda > 0$ – произвольное число.

Полученные оценки переносятся на краевые задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \frac{\partial T}{\partial x} + cT + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_{t_0},$$

($a, b, c = \text{const}$), так как подстановкой $T(x, t) = \exp[-bx/2a + (c - b^2/4a)t] W(x, t)$ это уравнение приводится к виду $W'_t = aW''_{xx} + F_1(x, t)$, рассмотренному выше.

Полученные оценки позволяют также сформулировать следующий вывод: при $T(x, t)|_{\tilde{A}_{t_0}} \leq 0$

и $F(x, t) \leq 0$ решение $T(x, t)$ неположительно в $\bar{\Omega}_{t_0}$; при $T(x, t)|_{\tilde{A}_{t_0}} \geq 0$ и $F(x, t) \geq 0$ решение

$T(x, t)$ неотрицательно в $\bar{\Omega}_{t_0}$. Если же $F(x, t) \equiv 0$, то при любом $t_1 \in [0, t_0]$ справедливо $\min_{\tilde{A}_{t_0}} T \leq$

$\leq T(x, t_1) \leq \max_{\tilde{A}_{t_0}} T$ что составляет принцип максимума для уравнений параболического типа.

Перейдём теперь к частично ограниченной области $\Omega_{t_0} = \{(x, t): y(t) < x < \infty, 0 < t \leq t_0\}$ и

пусть $T(x, t)$ удовлетворяет в Ω_{t_0} условиям:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_{t_0}, \quad (21)$$

$$T(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \geq y(0) = y_0 > 0, \quad (22)$$

$$U(x, t) \leq \min [(-1/\lambda)\varphi_1(t) \exp(-\beta t)];$$

на $S^2_{t_1}$ выполняется

$$U(x, t) \geq \min [(1/\lambda)\varphi_2(t) \exp(-\lambda y(t) - \beta t)];$$

а во внутренней точке минимума (в Ω_{t_1})

$$U(x, t) \geq \min \left\{ F(x, t) / (\beta - a\lambda^2) \right\} \exp(-\lambda x - \beta t).$$

Объединяя все случаи (включая оценки в G_0) можно записать для решения второй краевой задачи при любом $t_1 \in (0, t_0)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=y(t)} = h(t) \left[T(x, t)|_{x=y(t)} - \varphi(t) \right], \quad (23)$$

$$t \geq 0,$$

$$|T(x, t)| \leq M_0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_{t_0}. \quad (24)$$

здесь:

$h(t) > 0$, $y(t) > 0$ – непрерывно-дифференцируемые функции;

$$\varphi(t) \in C^0(t \geq 0);$$

$$\Phi_0(x) \in C^1(x \geq y_0);$$

$$F(x, t) \in C^0(\Omega_{t_0}).$$

Искомое решение $T(x, t) \in C^2(\Omega_{t_0}) \cap C^0(\bar{\Omega}_{t_0})$, $\text{grad}_x T(x, t) \in C^0(\bar{\Omega}_{t_0})$.

Найдём оценку модуля решения задачи (21) – (24). Введём подвижную систему координат $z = y(t) - x$, полагая $U(z, t) \equiv T(x, t)$. Тогда (21) – (24) будут:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - v(t) \frac{\partial U}{\partial z} + F(z, t), \quad (25)$$

$$(z, t) \in \Omega_{t_0},$$

$$U(z, 0) = \Phi_0(z), \quad z \leq 0, \quad (26)$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z} + h(t)U \right]_{z=0} = h(t)\varphi(t), \quad t \geq 0, \quad (27)$$

$$|U(z, t)| \leq M_0, \quad (28)$$

$$(z, t) \in \Omega_0 = \{-\infty < z < 0, 0 < t \leq t_0\}.$$

Рассмотрим далее прямоугольную область $Q_{t_0}(\varepsilon) = \{(z, t) : -\sqrt{2a/\varepsilon} < z < 0, 0 < t \leq t_0\}$ и новую функцию

$$\left. \begin{aligned} W(z, t) &= U(z, t) \exp(-\varepsilon t) - F_1(z, t), \\ F_1(z, t) &= c_1 + c_2 t + (M_0/2a) \varepsilon (z^2 + c_3 t), \\ c_1 &= \sup_{z \leq 0} |\Phi_0(z)| + \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)|, \\ c_2 &= \sup_{\Omega_0} |F(z, t)| + M_0 \sqrt{2\varepsilon/a} \sup_{t > 0} |v(t)|. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Здесь ε и c_3 – произвольные положительные числа, выбор которых произведём позже. В области $Q_{t_0}(\varepsilon)$ функция $W(z, t)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - a \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + v(t) \frac{\partial W}{\partial z} = -\varepsilon W - c_2 - \varepsilon(c_1 + c_2 t) - \quad (30)$$

$$-v(t)(M_0 \varepsilon / a) z - (M_0 \varepsilon / 2a) \times \\ \times [c_3(1 + \varepsilon t) - (2a - \varepsilon z^2)] + F(z, t) \exp(-\varepsilon t), \\ W(z, 0) = \Phi_0(z) - c_1 - M_0 \varepsilon z^2 / 2a, \quad z \leq 0, \quad (31)$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial z} + h(t)W \right]_{z=0} = \\ = h(t) \varphi(t) \exp(-\varepsilon t) - h(t) F_1(0, t) \quad (32)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём c_3 таким, чтобы выражение при $M_0 \varepsilon / 2a$ справа в (30) было неотрицательным. Находим для c_3 :

$$c_3 \geq \frac{2a - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon}. \quad (33)$$

Покажем теперь, что в области $\bar{Q}_{t_0}(\varepsilon)$ функция $W(z, t)$, удовлетворяющая (30) – (32) не может достигать положительного максимума. Действительно, из (31) и (28) – (29) находим:

$$W(z, 0) = \Phi_0(z) - c_1 - M_0 \varepsilon z^2 / 2a \leq \Phi_0(z) - c_1 \leq 0,$$

$$W(z, t)|_{z=-\sqrt{2a/\varepsilon}} \leq$$

$$\leq U(z, t)|_{z=-\sqrt{2a/\varepsilon}} -$$

$$-M_0 - \left(c_1 + c_2 t + \frac{M_0 \varepsilon}{2a} c_3 t \right) \leq 0.$$

Если точка максимума попадает на границу $z = 0$, то в ней $W'_z \geq 0$ и из (32) и (29) следует:

$$\begin{aligned} \max_{z=0} W(z, t) &\leq \varphi(t) \exp(-\varepsilon t) - \\ &- c_1 - c_2 t - M_0 \varepsilon c_3 t / 2a \leq \varphi(t) - c_1 \leq 0, \\ t &\geq 0. \end{aligned}$$

Если точка максимума находится внутри области $\bar{Q}_{t_0}(\varepsilon)$, то в ней $W'_z = 0$ и

$W'_t - a W''_{zz} \geq 0$ и далее уравнение (30) и соотношения (29) дают:

$$\begin{aligned} \max_{Q_{t_0}(\varepsilon)} [\varepsilon W(z, t)] &\leq F(z, t) \exp(-\varepsilon t) + \\ &+ v(t) M_0 \sqrt{2\varepsilon/a} \left(-\frac{z}{\sqrt{2a/\varepsilon}} \right) - c_2 < \\ &< F(z, t) + v(t) M_0 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} - c_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Это доказывает, что функция $W(z, t)$ вообще не имеет точек положительного максимума в $\bar{Q}_{t_0}(\varepsilon)$. Таким образом: $W(z, t) \leq 0$.

Возьмём теперь произвольную точку (z_1, t_1) из полосы $0 \leq t \leq t_0$. Тогда по доказанному $W(z_1, t_1) \leq 0$ при $-\sqrt{2a/\varepsilon} \leq z_1 \leq 0$. Устремляя в этом неравенстве ε к нулю и учитывая (29), находим

$$\left. \begin{aligned} U(z_1, t_1) &\leq c_1 + c_2 t_1, \\ c_1 &= \sup_{z \leq 0} |\Phi_0(z)| + \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)|, \\ c_2 &= \sup_{\Omega_0} |F(z, t)|. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Для оценки $U(z, t)$ снизу нужно взять функцию $\tilde{W}(z, t) = U(z, t) \exp(-\varepsilon t) + F_1(z, t)$, где $F_1(z, t) = c_1 + c_2 t + (M_0 \varepsilon / 2a) (z^2 + c_3 t)$, а параметры этой функции имеют те же значения, что и ранее. Функция $\tilde{W}(z, t)$ неотрицательна на нижнем основании ($t = 0$) области $Q_{t_0}(\varepsilon)$, не имеет точек отрицательного минимума ни на боковых границах $Q_{t_0}(\varepsilon)$, ни внутри $Q_{t_0}(\varepsilon)$.

Поэтому $\tilde{W}(z, t) \geq 0$ при $-\sqrt{2a/\varepsilon} \leq z_1 \leq 0$, $0 \leq t_1 \leq t_0$, откуда устремляя ε к нулю, получаем для $U(z_1, t_1)$ оценку снизу

$$U(z_1, t_1) \geq -c_1 - c_2 t_1. \quad (35)$$

Сведём систему неравенств (34) – (35) в одно неравенство, справедливое для любой точки области $\bar{\Omega}_0$: $|U(z, t)| \leq c_1 + c_2 t$. Переходя к функции $T(x, t)$, находим искомую оценку:

$$|T(x, t)| \leq \left\{ \sup_{x \geq y_0} |\Phi_0(x)| + \right. \\ \left. + \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)| + t \sup_{\Omega_0} |F(x, t)| \right\} \quad (36)$$

Заметим, что для всех рассмотренных случаев, а именно (1) – (4), (21) – (24) найденные оценки не зависят от значений переменных во времени относительных коэффициентов теплообмена $h(t)$, что является важным моментом при практическом использовании полученных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
2. Кудинов В.А., Карташов Э.М. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высшая школа, 2005. 430 с.
3. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. – М.: КолосС, 2010. 480 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Карташов Э.М. Теплоперенос в нецилиндрических областях (обзор) // Инж.-физ. журн. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. 736 с.