

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СРЕДЕ

*А.И.Балашов, ведущий инженер, И.В. Овчинникова, доцент

кафедра Физики, МИТХТ им. М.В. Ломоносова

*ЗАО «Крафтвэй корпорэйшн ПЛС»

e-mail: galina-ovch@mail.ru

Рассматривается задача о распространении волн малой амплитуды в ультрарелятивистской среде. На основе различных релятивистских гидродинамических теорий получены численные решения соответствующих дисперсионных уравнений, рассмотрены асимптотики решений. Показано, что только использование нелокальной гидродинамики Алексеева приводит к имеющим физический смысл решениям.

The problem of the flat harmonic wave expansion in ultra-relativistic media is considered. Numerical solutions of dispersion equations for the waves of small amplitudes were obtained within the framework of different local relativistic models and non-local Alexeev hydrodynamics. It is shown that only non-local theory leads to meaningful results.

Ключевые слова: релятивистские гидродинамические уравнения, нелокальное уравнение Алексеева, дисперсионные уравнения.

Key words: relativistic hydrodynamic equations, non-local Alexeev equation, dispersion equations.

1. Введение.

В настоящее время существуют различные теории для описания кинетических и гидродинамических процессов в релятивистской среде [1–4]. Однако все они должны удовлетворять принципу причинности, то есть скорость распространения сигнала не должна превышать скорости света. Вторым важным принципом является выполнение закона сохранения энергии, то есть, в частности, должно наблюдаться затухание волн, распространяющихся в релятивистской среде.

Тестовой задачей для проверки правильности различных релятивистских гидродинамических теорий является задача о распространении малых возмущений в ультрарелятивистской среде. Ультрарелятивистская среда является предельным случаем релятивистской среды, в такой среде выполняется соотношение

$$\zeta = \frac{m_0 c^2}{kT} \ll 1, \quad (1.1)$$

здесь m_0 – масса покоя частиц, c – скорость света, k – постоянная Больцмана, T – температура.

Таким образом, в ультрарелятивистской среде температуры очень высокие или массы покоя частиц малы (например, нейтрино). Такие вещества, как графены, в которых эффективная масса электронов и дырок, благодаря линейному закону дисперсии, равна нулю, также могут рассматриваться в рамках модели ультрарелятивистской среды, с заменой скорости света на скорость Ферми.

Рассмотрим распространение плоских гармонических волн малой амплитуды в ультрарелятивистской среде.

Пусть концентрация частиц

$$n = n_0(1 + s), \quad (1.2)$$

температура

$$T = T_0(1 + \eta), \quad (1.3)$$

где безразмерные параметры s, η пл 1.

Будем считать гидродинамические скорости движения физически малых объемов ультрарелятивистской среды v_0 малыми, т.е. решать задачу в линейном приближении. Распространение плоских гармонических волн описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} s &= \bar{s} e^{i\omega t - k'x}, \\ \eta &= \bar{\eta} e^{i\omega t - k'x}, \\ v_0 &= \bar{v}_0 e^{i\omega t - k'x}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести безразмерное волновое число

$$\hat{k} = \frac{k'c}{\omega}. \quad (1.5)$$

Подстановка решений (1.4) в ту или иную гидродинамическую модель приводит к дисперсионным уравнениям, решение которых далее исследуется. С этой целью запишем комплексное волновое число \hat{k} в виде

$$\hat{k} = \alpha + i\beta, \quad (1.6)$$

Представление \hat{k} в виде (1.6) позволяет записать решения (1.4) в виде затухающих гармонических волн. Например,

$$s = \bar{s} \exp\left(-\frac{\omega}{c} \alpha x\right) \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)\right), \quad (1.7)$$

т.е. величина α характеризует затухание волн, а величина β – отношение скорости света c к фазовой скорости распространения волн.

В последующих разделах статьи будут приведены коэффициенты α и β для волн различной частоты, полученные в результате численного решения дисперсионных уравнений, соответствующих различным релятивистским гидродинамическим теориям. Численные расчеты по релятивистским локальным уравнениям Навье – Стокса и Барнетта, а также по нелокальным гидродинамическим уравнениям выполнены Алексеевым Б.В. [3, 5], численные расчеты по теории «13 полей» и по теории «14 полей» выполнены Балашовым А.И.

2. Результаты расчетов по релятивистским локальным уравнениям Навье – Стокса и Барнетта.

Приведем результаты, которые получены в рамках релятивистских локальных уравнений Навье-Стокса. Дисперсионное уравнение для релятивистских локальных уравнений Навье-Стокса [1] с учетом (1.4)-(1.6) принимает вид

$$\frac{k^4}{9} \left(\frac{5}{4} x^2 - \frac{5}{4} ix \right) + \frac{k^2}{3} \left(-\frac{9}{4} ix - 1 \right) - 1 = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $x = \omega\tau_0$, где τ_0 - время релаксации.

Пусть

$$\beta^2 - \alpha^2 = y, \quad \alpha\beta = z. \quad (2.2)$$

Вещественная часть уравнения (2.1)

$$\left(y^2 - 4z^2 \right) x^2 - 4zxy + \frac{12}{5} y + \frac{54}{5} zx - \frac{36}{5} = 0, \quad (2.3)$$

мнимая часть

$$-\left(y^2 - 4z^2 \right) x - 4zyx^2 + \frac{27}{5} xy - \frac{24}{5} z = 0. \quad (2.4)$$

Получим асимптотические решения системы (2.3)-(2.4).

1) Асимптотическое решение при $x = 0$, т.е. $\omega\tau_0 = 0$

Из (2.3) имеем $\frac{12}{5} y = \frac{36}{5}$, $y = 3$. Из (2.4)

следует $z = 0$, тогда из (2.2) получаем:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{3} \quad (2.5)$$

Уравнение (1.7) с учетом (2.5) приводится к виду

$$s = \bar{s} \exp \left(i\omega \left(t - \frac{\sqrt{3}x}{c} \right) \right). \quad (2.6)$$

то есть при частоте $\omega \rightarrow 0$ волны являются незатухающими. Фазовая скорость распространения волн $v_s^{ur} = \frac{c}{\sqrt{3}}$, что соответствует [1].

2) Асимптотическое решение при $x \rightarrow \infty$, т.е. $\omega \rightarrow \infty$

Из уравнения (2.3) следует

$$y^2 - 4z^2 = 0,$$

из (2.4) находим $zy = 0$, т.е. $y = 0$, $z = 0$. Тогда из (2.2) получаем $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

Соответственно фазовая скорость волн при $\omega \rightarrow \infty$ определяется соотношением

$$v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta_\infty} \rightarrow \infty.$$

Нахождение полных решений системы алгебраических уравнений (2.3),(2.4) является нетривиальной задачей. Используемый метод [6] заключается в том, чтобы свести систему уравнений (2.3), (2.4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с дифференцированием по параметру x . В этом случае вещественной части дисперсионного уравнения соответствует уравнение

$$y' \left(2yx^2 - 4zx + \frac{12}{5} \right) + z' \left(-8x^2z - 4xy + \frac{54}{5} x \right) + 2x \left(y^2 - 4z^2 \right) - 4zy + \frac{54}{5} z = 0, \quad (2.7)$$

а мнимой части – уравнение

$$y' \left(-4zx^2 - 2yx + \frac{27}{5} x \right) + z' \left(-4yx^2 + 8zx - \frac{24}{5} \right) - 8xyz - y^2 + 4z^2 + \frac{27}{5} y = 0. \quad (2.8)$$

Результаты численного решения задачи Коши приведены на рис. 1, 2.

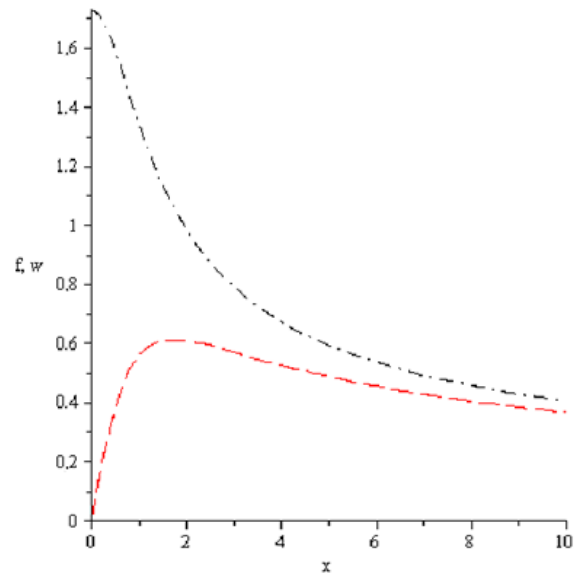


Рис. 1. Коэффициент затухания α ($w(x) = \alpha(x)$) (пунктирная линия) и коэффициент скорости β (штрих – пунктирная линия), ($v_{ph}^{ur} = c / \beta$, $w(x) = \beta(x)$), полученные из локальных релятивистских уравнений Навье-Стокса.

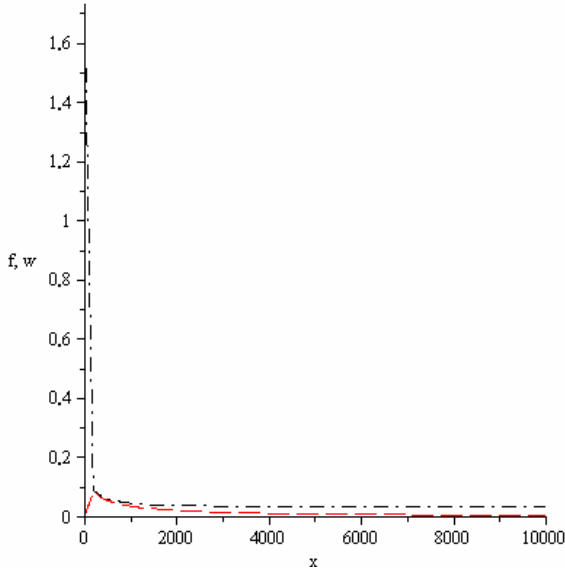


Рис. 2. Коэффициент затухания α ($w(x) = \alpha(x)$) (пунктирная линия) и коэффициент скорости β (штрих – пунктирная линия), ($v_{ph}^{ur} = c/\beta$, $w(x) = \beta(x)$), полученные из локальных релятивистских уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим теперь результаты, которые получены в рамках релятивистских локальных уравнений Барнетта. Дисперсионное уравнение для релятивистских локальных уравнений Барнетта [1] в обозначениях, аналогичных (2.1), при $x = \omega\tau_0$ принимает вид

$$-\frac{k^6}{27}\left(\frac{5}{12}x^4 - \frac{15}{8}ix^3\right) + \frac{k^4}{9}\left(\frac{7}{3}x^2 - \frac{5}{4}ix\right) - \frac{k^2}{3}\left(\frac{5}{12}x^2 + \frac{9}{4}ix + 1\right) - 1 = 0, \quad (2.9)$$

где, как и в (2.2), $\beta^2 - \alpha^2 = y$, $\alpha\beta = z$.

Вещественная часть уравнения (2.9) записывается так

$$y'\left(\frac{5}{4}y^2x^4 - 5z^2x^4 - \frac{45}{2}zyx^3 + 14yx^2 - 15xz + \frac{15}{4}x^2 + 9\right) + z'\left(-10zyx^4 - \frac{45}{4}x^3y^2 + 45x^3z^2 - 56x^2z - 15xy + \frac{81}{2}x\right) + \left(\frac{5}{3}y^3 - 20z^2y\right)x^3 - x^2\left(\frac{135}{4}zy^2 - 45z^3\right) + 14(y^2 - 4z^2)x - 15yz + \frac{15}{2}xy + \frac{81}{2}z = 0, \quad (2.12)$$

а мнимой части - уравнение

$$y'\left(-5zyx^4 + 12z^2\frac{15}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^3y^2 - \frac{15}{2}xy - 28x^2z + \frac{81}{4}x\right) + z'\left(10z^2x^4 - \frac{5}{2}y^2x^4 + 24zy\frac{15}{8}x^3 + 30xz - 28x^2y - \frac{15}{2}x^2 - 18\right) + 4x^3\left(\frac{10}{3}z^3 - \frac{5}{2}zy^2\right) + \left(\frac{135}{2}z^2y - \frac{45}{8}y^3\right)x^2 - \frac{15}{4}y^2 + 15z^2 - 56xzy + \frac{81}{4}y - 15zx = 0. \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{5}{12}y^3 - 5z^2y\right)x^4 - \frac{15}{4}x^3(3zy^2 - 4z^3) + 7x^2(y^2 - 4z^2) - 15xyz + y\left(\frac{15}{4}x^2 + 9\right) + \frac{81}{2}xz - 27 = 0, \quad (2.10)$$

а мнимая часть

$$\left(\frac{10}{3}z^3 - \frac{5}{2}zy^2\right)x^4 + \frac{15}{8}(12z^2y - y^3)x^3 - \frac{15}{4}x(y^2 - 4z^2) - 28zyx^2 + \frac{81}{4}xy - 18z\left(\frac{5}{12}x^2 + 1\right) = 0. \quad (2.11)$$

Получим асимптотические решения системы (2.10)-(2.11).

1) Асимптотическое решение при $x = 0$, т.е. $\omega\tau_0 = 0$

Из (2.10) имеем $9y - 27 = 0$, $y = 3$. Из (2.11) следует $z = 0$; тогда из (2.2) получаем $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{3}$, что совпадает с соответствующей асимптотикой, полученной с помощью локальных релятивистских уравнений Навье-Стокса.

2) Асимптотическое решение при $x \rightarrow \infty$, т.е. $\omega \rightarrow \infty$

Из (2.10) имеем $\frac{5}{12}y^3 - 5z^2y = 0$; из (2.11) находим $-\frac{5}{2}zy^2 + \frac{10}{3}z^3 = 0$, т.е. $y = 0$, $z = 0$.

Тогда из (2.2) получаем $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. Соответственно фазовая скорость волн при $\omega \rightarrow \infty$ $v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta_\infty} \rightarrow \infty$, как и для решений, полученных по локальным релятивистским уравнениям Навье-Стокса.

Для нахождения полных решений получена система дифференциальных уравнений с дифференцированием по x (аналогично (2.7), (2.8)). Вещественной части дисперсионного уравнения соответствует уравнение

Результаты численных расчетов приведены на рис. 3, 4.

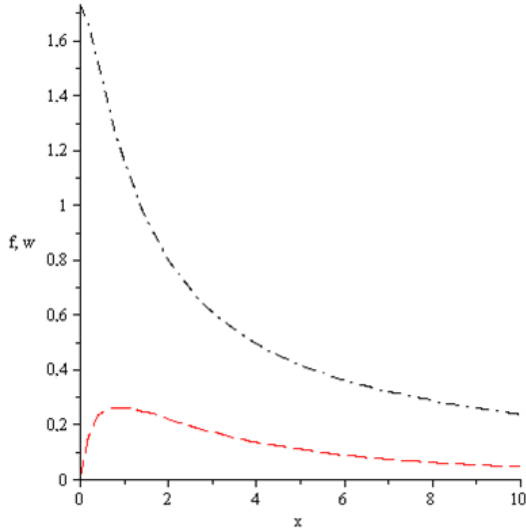


Рис.3. Коэффициент затухания $\alpha (w(x) = \alpha(x))$ (пунктирная линия) и коэффициент скорости β (штрих – пунктирная линия), $(v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}, w(x) = \beta(x))$, полученные из локальных релятивистских уравнений Барнетта.

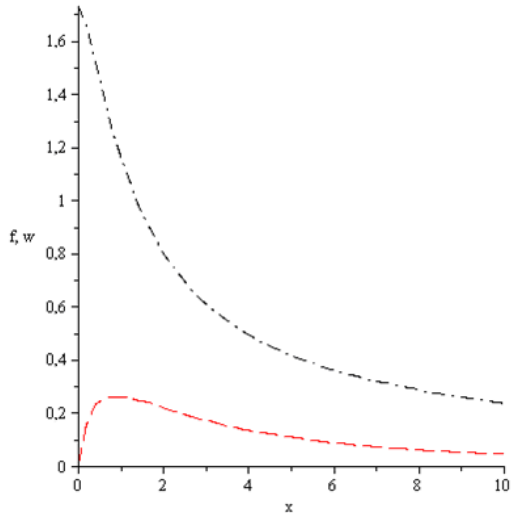


Рис.4. Коэффициент затухания $\alpha (w(x) = \alpha(x))$ (пунктирная линия) и коэффициент скорости β (штрих – пунктирная линия), $(v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}, w(x) = \beta(x))$, полученные из локальных релятивистских уравнений Барнетта.

Отметим, что для решений, найденных по локальным релятивистским уравнениям Навье-Стокса и Барнетта, фазовая скорость волн неограниченно возрастает при $\omega \rightarrow \infty$, что не имеет физического смысла. Коэффициент затухания α при этом стремится к нулю.

3. Результаты расчетов по теориям «13 полей» и «14 полей».

Приведем теперь дисперсионное уравнение,

полученное по теории «13 полей» [1]. В обозначениях, аналогичных (2.1), при $x = \omega\tau_0$, это уравнение принимает вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{k^4}{9} \left(\frac{85}{24} x^2 - \frac{5}{4} ix \right) + \\ & + \frac{k^2}{3} \left(\frac{15}{2} x^2 - \frac{35}{6} ix - 1 \right) + \\ & + \frac{25}{8} x^2 - \frac{43}{12} ix - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Вещественная часть уравнения (3.1)

$$\left. \begin{aligned} & \frac{85}{24} x^2 (y^2 - 4z^2) - 5zxy + \\ & + 3y \left(-\frac{15}{2} x^2 + 1 \right) + 35zx + \frac{225}{8} x^2 - 9 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

мнимая часть

$$\left. \begin{aligned} & -zux^2 \frac{85}{6} - \frac{5}{4} x (y^2 - 4z^2) + \\ & + \frac{35}{2} yx + 6z \left(\frac{15}{2} x^2 - 1 \right) - \frac{129}{4} x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Получим асимптотические решения системы (3.2) - (3.3).

1) Асимптотическое решение при $x = 0$, т.е. $\omega\tau_0 = 0$.

Из (3.2) имеем $3y - 9 = 0$, $y = 3$; из (3.3) имеем $z = 0$. Тогда из (2.2) получаем $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{3}$,

что совпадает с соответствующей асимптотикой решений, полученных по локальным релятивистским уравнениям Навье-Стокса и Барнетта.

2) Асимптотическое решение при $x \rightarrow \infty$, т.е. $\omega \rightarrow \infty$.

Из (3.3) имеем $-zy \frac{85}{6} + \frac{15}{2} 6z = 0$; $y = \frac{54}{17}$

или $z = 0$.

Из (3.2) находим

$$\frac{85}{24} (y^2 - 4z^2) - 3y \frac{15}{2} + \frac{225}{8} = 0. \quad (3.4)$$

Если $y = \frac{54}{17}$, то из (3.4) следует

$$\frac{85}{24} \left(\frac{54^2}{17^2} - 4z^2 \right) = \frac{3 \cdot 15 \cdot 54}{2 \cdot 17} - \frac{225}{8}.$$

Но в этом случае $z^2 < 0$, следовательно, решений нет. Если же $z = 0$, то из (3.4) находим $y^2 \frac{85}{24} - 3y \frac{15}{2} + \frac{225}{8} = 0$, откуда

$$y_1 = \frac{54 - \sqrt{621}}{17}, \quad y_2 = \frac{54 + \sqrt{621}}{17}.$$

Тогда из (2.2) получаем $\alpha \rightarrow 0$,

$$\beta_{1\infty} = \sqrt{\frac{54 - \sqrt{621}}{17}},$$

$$v_{ph1}^{ur} = \frac{c\sqrt{17}}{\sqrt{54 - \sqrt{621}}} \approx 0.765c,$$

$$\frac{v_{ph1}^{ur}}{v_s^{ur}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18 - \sqrt{69}}} \approx 1.32,$$

$$\beta_{2\infty} = \sqrt{\frac{54 + \sqrt{621}}{17}},$$

$$v_{ph2}^{ur} = \frac{c\sqrt{17}}{\sqrt{54 + \sqrt{621}}} \approx 0.464c,$$

$$\frac{v_{ph2}^{ur}}{v_s^{ur}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18 + \sqrt{69}}} \approx 0.80.$$

Это так называемые [1] «первый» и «второй» звук. Очевидно, наличие двух асимптотических решений при отсутствии затухания является чисто математическим эффектом и не имеет физического смысла.

Перейдем к численному решению системы двух уравнений (3.2) и (3.3) (вещественной и мнимой частей). Для решения этой системы использовали метод итераций Ньютона. Решение искали от конца интервала к началу, чтобы исключить возможную множественность решений в области нуля. Рассматривался интервал значений x от 0 до 100 с шагом 0.01. В качестве начального приближенного решения системы на правой границе интервала использовали значения $y_1 = \frac{54 - \sqrt{621}}{17}$ и $z = 0$.

Для вычисления решений системы на очередном шаге в качестве начального приближенного решения использовали решения с предыдущего шага. Результаты расчетов приведены на рис. 5-8. Невязка по обоим уравнениям составляла менее 10^{-5} . Из рисунков видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ коэффициент затухания α стремится к нулю. Приведенные решения соответствуют асимптотике $\beta_{1\infty}$ и формулам (3.5).

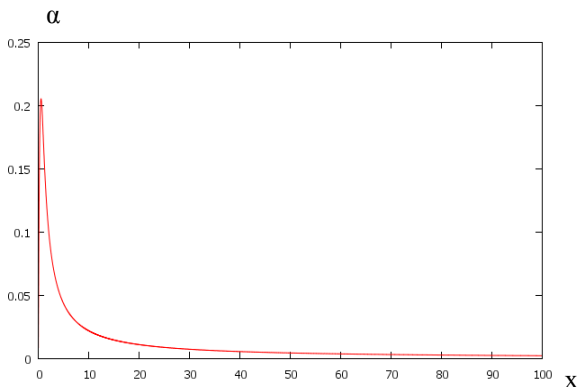


Рис. 5. Коэффициент затухания α , полученный из локальных релятивистских уравнений «13 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0; 100]$).

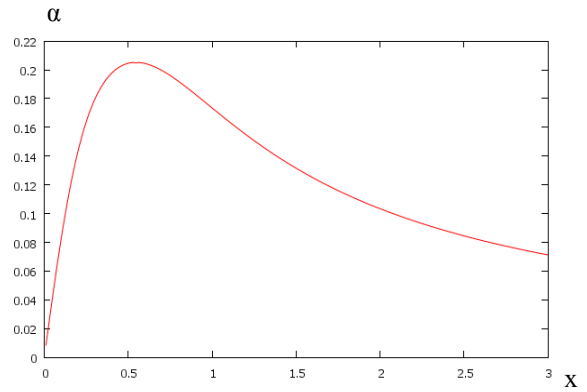


Рис. 6. Коэффициент затухания α , полученный из локальных релятивистских уравнений «13 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0; 3]$).

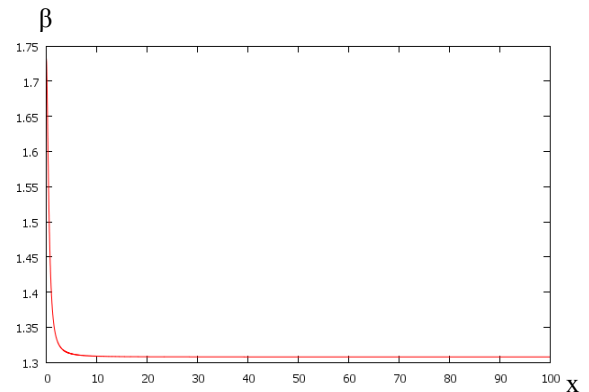


Рис. 7. Коэффициент скорости β , ($v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}$), полученный из локальных релятивистских уравнений «13 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0; 100]$).

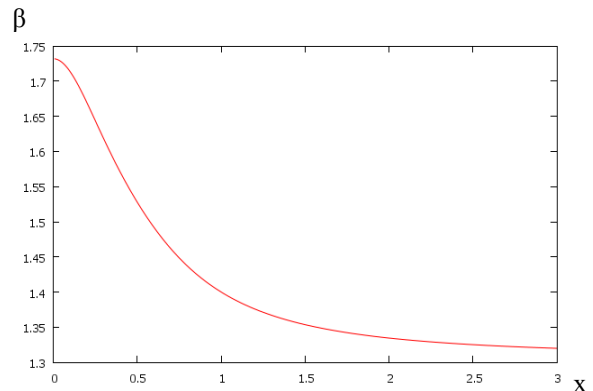


Рис. 8. Коэффициент скорости β , ($v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}$), полученный из локальных релятивистских уравнений «13 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0; 3]$).

Приведем теперь результаты расчетов по теории «14 полей». Дисперсионное уравнение, полученное по теории «14 полей» [1], в

обозначениях, аналогичных (2.1), при $x = \omega\tau_0$ принимает вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{k^4}{9} \left(-\frac{225}{16}ix^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{5}{4}ix \right) + \\ & + \frac{k^2}{3} \left(-\frac{175}{8}ix^3 - \frac{145}{6}x^2 + \frac{25}{3}ix + 1 \right) - \\ & - \frac{125}{16}ix^3 - \frac{145}{12}x^2 + \frac{73}{12}ix + 1 = 0. \end{aligned} \right\} (3.7)$$

Пусть, как и в (2.2), $\beta^2 - \alpha^2 = y$, $\alpha\beta = z$.

Вещественная часть уравнения (3.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{35}{4}x^2(y^2 - 4z^2) + zy \left(-\frac{225}{4}x^3 + 5x \right) + \\ & + y \left(-3 + \frac{145}{2}x^2 \right) + 6z \left(\frac{175}{8}x^3 - \frac{25}{3}x \right) + \\ & + 9 - \frac{435}{4}x^2 = 0, \end{aligned} \right\} (3.8)$$

мнимая часть

$$\left. \begin{aligned} & \left(y - 4z^2 \right) \left(-\frac{225}{16}x^3 + \frac{5}{4}x \right) + 35zyx^2 + \\ & + 3y \left(\frac{175}{8}x^3 - \frac{25}{3}x \right) + 6z \left(1 - \frac{145}{6}x^2 \right) - \\ & - \frac{1125}{16}x^3 + \frac{219}{4}x = 0. \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Получим асимптотические решения системы (3.8)-(3.9).

1) Асимптотическое решение при $x = 0$, т.е. $\omega\tau_0 = 0$. Из (3.8) имеем $-3y + 9 = 0$, $y = 3$; из (3.9) $z = 0$, тогда из (2.2) получаем $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{3}$, что совпадает с соответствующей асимптотикой, полученной по локальным релятивистским уравнениям Навье-Стокса, Барнетта и «13 полей».

2) Асимптотическое решение при $x \rightarrow \infty$, т.е. $\omega \rightarrow \infty$.

Из (3.8) имеем $-zy \frac{225}{4} + 6z \frac{175}{8} = 0$;

$$\left. \begin{aligned} & y = \frac{21}{9} \text{ или } z = 0. \text{ Из (3.9) имеем} \\ & - \left(y^2 - 4z^2 \right) \frac{225}{16} + 3y \frac{175}{8} - \frac{1125}{16} = 0. \end{aligned} \right\} (3.10)$$

Если $y = \frac{21}{9}$, то из (3.10) находим

$$- \left(\frac{441}{81} - 4z^2 \right) \frac{225}{16} = \frac{1125}{16} - \frac{7 \cdot 175}{8},$$

следовательно $z^2 < 0$, решений нет.

Если же $z = 0$, то из (3.10) находим

$$-y^2 \frac{225}{16} + 3y \frac{175}{8} - \frac{1125}{16} = 0,$$

или

$$y_1 = \frac{5}{3}, y_2 = 3$$

Тогда из (2.2) получаем $\alpha \rightarrow 0$, при этом

$$\beta_{1\infty} = \sqrt{\frac{5}{3}}, v_{ph1}^{ur} = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 0.775c, \quad (3.11)$$

$$\frac{v_{ph1}^{ur}}{v_s^{ur}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34,$$

$$\beta_{2\infty} = \sqrt{3}, v_{ph2}^{ur} = \frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{v_{ph2}^{ur}}{v_s^{ur}} = 1. \quad (3.12)$$

Таким образом, как и в теории «13 полей», локальная теория приводит к 2 решениям при отсутствии затухания, что является чисто математическим эффектом и не имеет физического смысла.

Перейдем к численному решению системы двух уравнений (3.8) и (3.9) (вещественной и мнимой частей). Вычисления проводились так же, как и для уравнений «13 полей». Однако уравнение «14 полей» оказалось существенно хуже, так как в области значений x от 0 до 1 было обнаружено несколько решений системы уравнений. Вследствие этого при выбранном подходе наблюдалось устойчивое решение на асимптотической части и «выбросы» в области значений x от 0 до 1, которые меняли свои характеристики при изменении шага вычислений. В качестве начального приближенного решения системы на правой границе интервала использовали значения $y_1 = \frac{5}{3}$ и $z = 0$. Для вычисления решений системы на очередном шаге в качестве начального приближенного решения использовали решения с предыдущего шага. Невязка по обоим уравнениям составляла менее 10^{-5} . Результаты расчетов приведены на рис. 9-12. Из рисунков видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ коэффициент затухания α стремится к нулю.

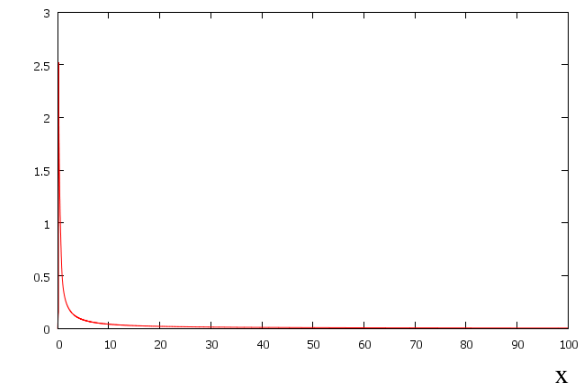


Рис. 9. Коэффициент затухания α , полученный из локальных релятивистских уравнений «14 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0;100]$).

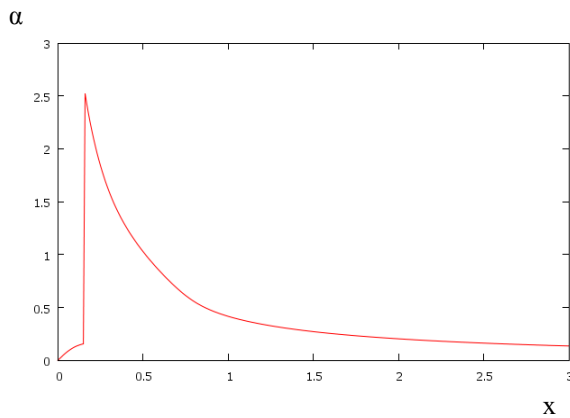


Рис. 10. Коэффициент затухания α , полученный из локальных релятивистских уравнений «14 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0;3]$).

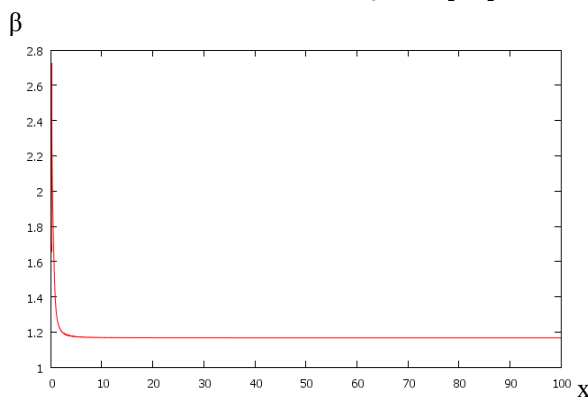


Рис. 11. Коэффициент скорости β , ($v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}$), полученный из локальных релятивистских уравнений «14 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0;100]$).

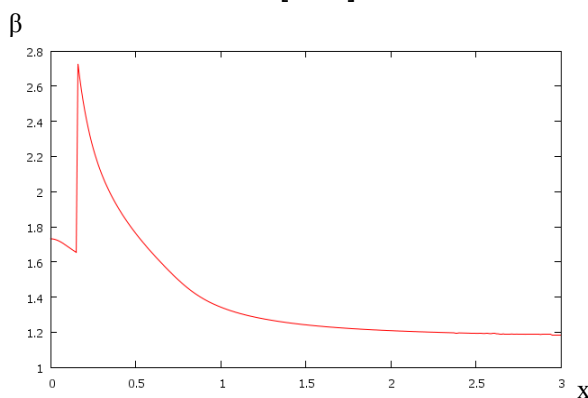


Рис. 12. Коэффициент скорости β , ($v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}$), полученный из локальных релятивистских уравнений «14 полей», в зависимости от $x = \omega\tau_0$ ($x \in [0;3]$).

Таким образом, недостатками дисперсионных уравнений, полученных по локальным теориям «13» и «14» полей, является отсутствие затухания решений при больших частотах и наличие при этом двух асимптотических ре-

шений, что не имеет физического смысла. Кроме того, дисперсионное уравнение, полученное по теории «14 полей», имеет несколько решений в области значений x от 0 до 1, что также не имеет физического смысла.

4. Результаты расчетов по обобщенным релятивистским уравнениям Эйлера

Рассмотрим теперь результаты, к которым приводит использование нелокальных релятивистских гидродинамических уравнений – обобщенных релятивистских уравнений Эйлера [2–5].

Соответствующее дисперсионное уравнение в безразмерной форме принимает вид [3, 5]:

$$4a^3 \hat{k}^6 + \left(-\frac{1}{3}a - 4ia^2 - 4a^3\right) \hat{k}^4 + \left(\frac{1}{3}i + 2a - 8ia^2 - 4a^3\right) \hat{k}^2 + \left(i + 13a - 52ia^2 - 60a^3\right) = 0, \quad (4.1)$$

где

$$a = \frac{\omega\tau_0}{\zeta_0}. \quad (4.2)$$

Здесь $\zeta_0 = \frac{m_0 c^2}{kT_0}$. Подставим (1.6) в (4.1) и

разделим вещественную и мнимую части.

Вещественная часть:

$$4a^3(\alpha^6 - 15\alpha^4\beta^2 + 15\alpha^2\beta^4 - \beta^6) + \left(-\frac{1}{3}a - 4a^3\right)(\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4) + 4a^2(4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3) + (2a - 4a^3)(\alpha^2 - \beta^2) + \left(8a^2 - \frac{1}{3}\right)2\alpha\beta + (13a - 60a^3) = 0, \quad (4.3)$$

мнимая часть

$$4a^3(6\alpha^5\beta - 20\alpha^3\beta^3 + 6\alpha\beta^5) + \left(-\frac{1}{3}a - 4a^3\right)(4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3) - 4a^2(\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4) + \left(\frac{1}{3} - 8a^2\right)(\alpha^2 - \beta^2) + (2a - 4a^3)2\alpha\beta + (1 - 52a^2) = 0. \quad (4.4)$$

Рассмотрим асимптотические решения системы (4.3), (4.4)

1) Если

$$a = \frac{\omega\tau_0}{\zeta_0} \rightarrow 0, \quad (4.5)$$

то из (4.3), (4.4) получим

$$-\frac{2}{3}\alpha\beta = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{3}(\alpha^2 - \beta^2) + 1 = 0, \quad (4.7)$$

с решением

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{3}, \quad (4.8)$$

что совпадает с соответствующей асимптотикой, полученной по локальным релятивистским уравнениям Навье-Стокса, Барнетта, «13 полей» и «14 полей».

2) Если

$$a = \frac{\omega\tau_0}{\zeta_0} \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

то из уравнения (4.1) имеем

$$\hat{k}^6 - \hat{k}^4 - \hat{k}^2 - 15 = 0, \quad (4.10)$$

или для вещественной и мнимой части из (4.3), (4.4)

$$\left(\alpha^6 - 15\alpha^4\beta^2 + 15\alpha^2\beta^4 - \beta^6\right) - \left(\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4\right) - \left(\alpha^2 - \beta^2\right) - 15 = 0 \quad (4.11)$$

$$\left(6\alpha^5\beta - 20\alpha^3\beta^3 + 6\alpha\beta^5\right) - \left(4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3\right) - 2\alpha\beta = 0. \quad (4.12)$$

Введем переменные

$$y = \beta^2 - \alpha^2, \quad (4.13)$$

$$\xi = \alpha^2\beta^2,$$

тогда система (4.11), (4.12) принимает вид

$$y^3 - 12y\xi + y^2 - y - 4\xi + 15 = 0, \quad (4.14)$$

$$3y^2 - 4\xi + 2y - 1 = 0 \quad (4.15)$$

Выражая из (4.15) ξ и подставляя в (4.14), имеем

$$y^3 + y^2 - 2 = 0, \quad (4.16)$$

или

$$(y-1)(y^2 + 2y + 2) = 0. \quad (4.17)$$

Единственным действительным решением является

$$y = 1, \quad (4.18)$$

$$y' \left[2x^3(3y^2 - 12z^2 - 1) + 8x^2z + y \left(\frac{1}{3}x + 4x^3 \right) + x \right] + z' \left[8x^2(y-1) - 4z \left(\frac{1}{3}x + 4x^3 + 12x^3y \right) + \frac{1}{3} \right] + \left(\frac{1}{2}y^2 - 2z^2 \right) \left(\frac{1}{3} + 12x^2 \right) + 6x^2 \left(y^3 - 12yz^2 \right) + 16xyz + y(1 - 6x^2) - 16xz + 90x^2 - \frac{13}{2} = 0. \quad (4.23)$$

Дифференциальное уравнение, которое соответствует мнимой части дисперсионного уравнения:

$$y' \left(12yzx^3 - 2x^2y + 4x^3z + \frac{1}{3}xz + 2x^2 - \frac{1}{12} \right) + z' \left[x^3(6y^2 - 24z^2 + 4y - 2) + 8x^2z + x + \frac{1}{3}xy \right] + 3x^2 \left(6y^2z - 8z^3 \right) + 2x(4z^2 - y^2) + 12x^2yz + \frac{1}{3}yz + 4xy + z(1 - 6x^2) - 26x = 0. \quad (4.24)$$

В уравнениях (4.23), (4.24) использованы следующие обозначения:

$$\beta^2 - \alpha^2 = y, \quad \alpha\beta = z, \quad a = x. \quad (4.25)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 13–16. Видно, что решения нелокальных дисперсионных уравнений во всей области

соответственно из (4.15)

$$\xi = 1. \quad (4.19)$$

Тогда из (4.13) находим, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$\beta_\infty = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.272, \quad (4.20)$$

$$\alpha_\infty = \frac{1}{\beta_\infty} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \approx 0.786.$$

Соответственно, фазовая скорость волн при $\omega \rightarrow \infty$

$$v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta_\infty} \approx 0.786c \quad (4.21)$$

и

$$\frac{v_{ph}^{ur}}{v_s^{ur}} = \frac{\sqrt{3}}{\beta_\infty} = \sqrt{\frac{6}{1+\sqrt{5}}} \approx 1.36. \quad (4.22)$$

Таким образом, при использовании нелокальных обобщенных релятивистских уравнений Эйлера при $\omega \rightarrow \infty$ мы получаем фазовую скорость 0.786c (4.21) и ненулевое затухание (4.20).

Отметим, что численные значения скорости «первого звука» в теории «13 полей» (3.5) и «14 полей» (3.11) близки к значению фазовой скорости (4.21), найденной по релятивистским обобщенным уравнениям Эйлера.

Для нахождения полных решений системы уравнений (4.3), (4.4) была получена система дифференциальных уравнений (аналогично (2.7), (2.8)) с дифференцированием по параметру a , обозначаемому в дальнейшем как x .

Дифференциальное уравнение, которое соответствует вещественной части дисперсионного уравнения:

значений x являются однозначными – без выбросов и особенностей, присущих локальной релятивистской теории Больцмана.

5. Выводы

Таким образом, можно сделать вывод, что использование нелокальных релятивистских

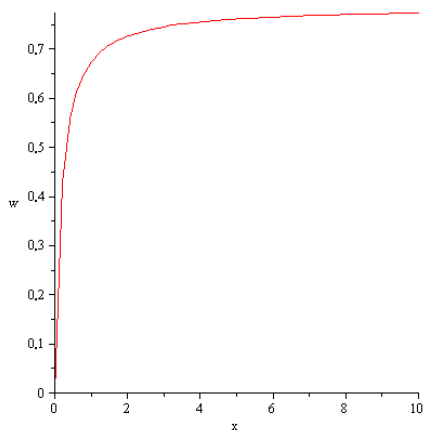


Рис. 13. Коэффициент затухания α ($w(x) = \alpha(a)$), полученный из обобщенных релятивистских уравнений Эйлера.

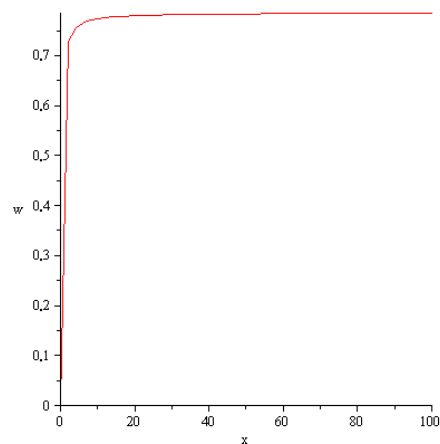


Рис. 14. Коэффициент затухания α ($w(x) = \alpha(a)$), полученный из обобщенных релятивистских уравнений Эйлера.

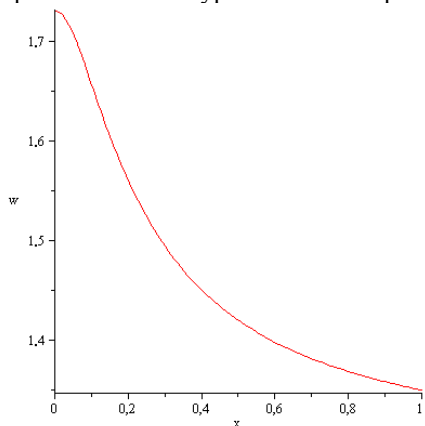


Рис. 15. Коэффициент скорости β , ($v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}$, $w(x) = \beta(a)$), полученный из обобщенных релятивистских уравнений Эйлера.

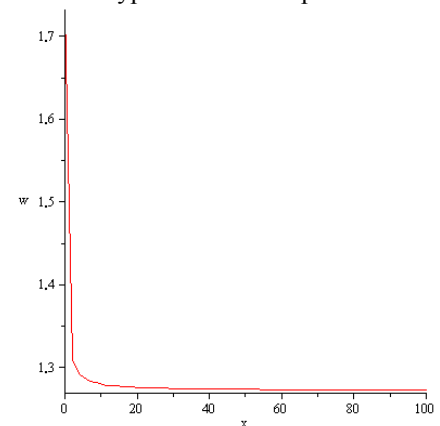


Рис. 16. Коэффициент скорости β , ($v_{ph}^{ur} = \frac{c}{\beta}$, $w(x) = \beta(a)$), полученный из обобщенных релятивистских уравнений Эйлера.

обобщенных уравнений Эйлера позволяет на уровне гидродинамического описания получить хорошие результаты во всем диапазоне частот, в том числе при высоких частотах получить ненулевое затухание и единственное, конечное (не превышающее скорости света) значение фазовой скорости. Таких результатов не удавалось получить при использовании локальных теорий. В частности, все локальные теории давали незатухающие решения при больших частотах. Релятивистские уравнения Навье – Стокса и Барнетта приводили к неограниченному возрастанию фа-

зовой скорости распространения волн при больших частотах, что нарушает принцип причинности. Теории «13 полей» и «14 полей» приводили к появлению двух асимптотических решений, кроме того, при расчетах по теории «14 полей» наблюдалась многозначность решений и при других частотах. Данные результаты показывают, что учет нелокальности позволяет существенно улучшить релятивистские гидродинамические уравнения. Указанные результаты имеют принципиальное значение при обработке экспериментальных данных на коллайдерах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Cercignani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann equation: Theory and applications. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2002. 384 p.
2. Алексеев Б.В., Овчинникова И.В. Квантовая релятивистская гидродинамика. Часть 1. – М.: ИПЦ МИТХТ, 2010. 64 с.
3. Алексеев Б.В., Овчинникова И.В. Квантовая релятивистская гидродинамика. Часть 2. – М.: ИПЦ МИТХТ, 2011. 55 с.
4. Alexeev B.V., Ovchinnikova I.V. The generalized relativistic kinetic and hydrodynamic theory. – Part I // J. Nanoelectronics & Optoelectronics. 2010. V. 5. № 3. P. 1–14.
5. Alexeev B.V., Ovchinnikova I.V. The generalized relativistic kinetic and hydrodynamic theory. – Part II // J. Nanoelectronics & Optoelectronics. 2010. V. 5. № 3. P. 15–31.
6. Alexeev B.V. Generalized Boltzmann physical kinetics. – Amsterdam: Elsevier, 2004. 368 p.