*Вестник МИТХТ, 2012, т. 7, № 1*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ХИМИИ И ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ**

*УДК 517.9*

# ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЯЕМОСТИ ПАРАМЕТРОВ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ НА ИХ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

**В.А. Ломовской, профессор, Е.А. Коровайцева, аспирант**

*кафедра Прикладной механики и основ конструирования МИТХТ им. М.В. Ломоносова*

*e-mail: lomovskoy@phyche.ac.ru*

*Рассматривается влияние качества поверхности стержней призматического сечения на частоты и формы собственных колебаний. Используются модифицированные уравнения Кирхгофа-Клебша, позволяющие учесть влияние растяжения-сжатия и поперечного сдвига стержней. Формулируется линейная начально-краевая задача на собственные значения. Построение частотной функции выполнено методом начальных параметров. Подтверждено существование нелинейной зависимости частот собственных колебаний от изменения параметров сечений стержней и высокая чувствительность форм собственных колебаний от изменяемости параметров сечений стержней. Выявлена актуальность разработки специальных высокоточных алгоритмов решения плохо обусловленных краевых задач для практического применения доказанного эффекта.*

*Influence of prismatic cross-section rods surface quality on natural frequencies and mode shapes is investigated. Modified equations of Kirchhoff and Klebsh are used. These equations allow taking into account the influence of tension-compression and in-plane shear of rods. Linear initial-value boundary-value eigenvalue problem is formulated. Modeling of frequency function is carried out with the help of method of initial parameters. Existence of nonlinear dependence of natural frequencies on rod cross-section parameters changing and high sensitivity of mode shapes when changing rod cross-section parameters is confirmed, Urgency of developing special high-precision algorithms of ill-conditioned boundary problems solution for practical use of the confirmed effect is revealed.*

***Ключевые слова:*** *колебания стержней, векторные уравнения, изгиб, растяжение-сжатие, сдвиг, краевая задача, метод начальных параметров, частотная функция.*

***Key words:*** *vibrations of rods, vector equation, bend, tension-compression, shift, boundary value problem, method of initial parameters, frequency function.*

При изучении резонансных колебаний кварцевых пластин и резонаторов сложного профиля было установлено, что на частоту и добротность процесса колебаний оказывает влияние как граничная форма поверхности резонатора, так и механическая чистота обработки этой поверхности. Кроме того, на частоту собственных колебаний (резонансная частота $\nu_{рез}$) и добротность колебательного процесса оказывает существенное влияние химическая природа, структура и строение материала, из которого изготовлен резонатор. При расчетах $\nu_{рез}$ принимаются любые упрощения механических и геометрических характеристик резонаторов, что приводит к весьма существенным погрешностям и значительным отклонениям теоретически полученных значений $\nu_{рез}$ и экспериментально наблюдаемых.

В данной статье проводится теоретический анализ влияния частоты собственных (резонансных) колебаний стержней как функции изменения параметра поперечного сечения (т.е. площади и формы) на базе модельных феноменологических представлений с позиций сплошной непрерывной среды без учёта внутреннего химического строения резонатора. Данный анализ произведен для нормальных условий (изотермический и изобарический режим) продольных, поперечных и смешанных колебательных процессов, возбуждаемых в стержнях прямоугольного и кольцевого поперечного сечения. Частоты собственных (резонансных) колебаний стержней (динамический характеристики колебательного процесса) в общем случае, зависят от следующих факторов: – геометрия стержня; узлы крепления стержня как резонатора; распределение жесткости стержня, как по длине, так и по поперечному сечению; тип возбуждаемых колебаний. В данной статье принимается неизменность расстояний между узлами закрепления резонатора. Учитывая неизменность модуля упругости (сдвига) и плотности материала резонатора (вследствие нормальных условий) жесткость стержня будет определяться только геометрией поперечного сечения.

Рассмотрим малые колебания призматических стержней с учетом влияния продольных сил и упрощенного учета влияния поперечных сил. Разрешающая система векторных уравнений равновесия имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} = -\mathbf{q} + \rho F \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2};$$
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial S} = -\mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S} \times \mathbf{N} + \rho \mathbf{J} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial t^2} \tag{1}$$

Здесь в локальной криволинейной системе координат XYZ, связанной с главными центральными осями сечений стержня, $\mathbf{N} = \{N \quad Q_Y \quad Q_Z\}^T$ – компоненты главного вектора внутренних сил в сечении стержня, $\mathbf{M} = \{M_K \quad M_Z \quad M_Y\}^T$ – компоненты главного момента этих сил, $\mathbf{q} = \{q_X \quad q_Y \quad q_Z\}^T$ – компоненты главного вектора внешних распределенных нагрузок на стержень, $\mathbf{q} = \{m_X \quad m_Z \quad m_Y\}^T$ – компоненты главного момента этих нагрузок, $\rho$ – плотность материала стержня, $F$ – площадь сечения стержня, $\mathbf{U} = \{U \quad W \quad V\}^T$ – компоненты вектора перемещений сечения стержня, $S$ – длина оси стержня от начального (краевого) сечения до текущего, $t$ – время процесса деформирования стержня, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор кривизны оси стержня, $\mathbf{J}$ – матрица инерции сечения стержня, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_K \quad \theta_Z \quad \theta_Y\}^T$ – вектор поворота сечения стержня при его деформировании, $\{...\}^T$ – символ транспонирования вектора.

Задача динамического деформирования стержня считается статически неопределимой. Поэтому для получения замкнутой системы уравнений уравнения равновесия (1) дополняются геометрическими дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial S} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S} \times \boldsymbol{\theta}\ ; \ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial S} = \boldsymbol{\chi} \qquad (2)$$

и линейными физическими соотношениями

$$\mathbf{N} = \alpha_{11}\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_{12}\boldsymbol{\chi}; \quad \mathbf{M} = \alpha_{21}\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_{22}\boldsymbol{\chi}. \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\chi}$ – векторы линейной деформации и изменения кривизны оси стержня в процессе деформирования, $\alpha_{ij}$ – блоки матрицы жесткости сечения стержня $\alpha$.

Для использования методов математической физики при расчете решения, получаемой в итоге дифференциально-алгебраической задачи, составляется из векторов $\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\theta}$ вектор разрешающих переменных $\mathbf{X} = \{\mathbf{N}^T \quad \mathbf{M}^T \quad \mathbf{U}^T \quad \boldsymbol{\theta}^T\}^T$.

Аналогично объединяются векторы внешних распределенных обобщенных нагрузок в уравнениях (1-2) в обобщенный вектор нагрузок $\mathbf{G} = \{\mathbf{q}^T \quad \mathbf{m}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T\}^T$, а матрицы инерционных свойств сечения в матрицу инерции

$$\mathbf{E}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho\mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho\mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

В этом случае соотношения (1-3) принимают вид в векторно-матричной форме, удобной для использования ЭВМ,

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S} = \mathbf{HX} + \mathbf{G} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x \mathbf{X}}{\partial t^2} \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \mathbf{0} & -\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial S} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,

$\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial S}$ – кососимметричная.

В связи с использованием при описании деформирования стержня дифференциальных соотношений (1-2, 4) для континуальных переменных эти соотношения дополняются дискретными начальными и граничными условиями, конкретизирующими задачу деформирования. В этом случае, граничные условия задачи динамического деформирования стержня имеют общий вид

$$\mathbf{H}_i \mathbf{X}(S_i, t) = \mathbf{G}_i, \qquad i=1,2 \qquad (5)$$

на начальные условия

$$\mathbf{U}(S,0) = \mathbf{U}_0(\mathrm{S}), \ \frac{\partial \mathbf{U}(\mathrm{S},0)}{\partial \mathrm{t}} = \mathbf{U}_0(\mathrm{S}),$$
$$\boldsymbol{\theta}(S,0) = \boldsymbol{\theta}_0(\mathrm{S}), \ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(S,t)}{\partial \mathrm{t}} = \boldsymbol{\theta}_0(\mathrm{S}). \qquad (6)$$

Соотношения (4-6) описывают задачу динамического деформирования стержней в виде линейной начально-краевой задачи. Она может быть решена различными методами, среди которых особое значение имеет метод разложения решения динамической задачи разложением по формам собственных колебаний [3]. Для ее решения на начальном этапе из соотношений (4-6) формулируется линейная начально-краевая задача расчета собственных колебаний с дифференциальными соотношениями

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial S} = \mathbf{HX} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x \mathbf{X}}{\partial t^2} \qquad (7)$$

однородными граничными условиями

$$\mathbf{H}_i \mathbf{X}(S_i, t) = \mathbf{0}, \qquad i=1,2 \qquad (8)$$

и исходными начальными условиями (6).

Для решения задачи (7-8), (6) используется согласно методу Фурье представление

$$\mathbf{X}(S,t) = \\ = \sum_{N=1}^{\infty} \mathbf{X}_N(S, \omega_N)(a_N \cos \omega_N t + b_N \sin \omega_N t). \qquad (9)$$

Подстановка (9) в (7-8) приводит к двум задачам, из которых для использования при анализе влияния изменяемости параметров сечений стержней на их динамические характеристики необходимо рассмотреть задачу на собственные значения

$$\mathbf{X}'_N = \mathbf{H}_N \mathbf{X}_N; \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{i,N}} \mathbf{X}_{i,N} = \mathbf{0}; \qquad N \in [1, \infty). \qquad (10)$$

Для решения задачи (10) в простейшем случае используется метод начальных параметров [4], согласно которому искомый вектор $\mathbf{X}_N(S)$ представляется, например, с использованием значения искомого вектора на левой границе отрезка интегрирования, в следующем виде:

$$\mathbf{X}_N(S,\omega_N)=\mathbf{M}_N(S,\omega_N)\,\mathbf{X}_{1,N}. \qquad (11)$$

В этом представлении матричная функция $\mathbf{M}_N$ является решением задач Коши ($\mathbf{E}$ – единичная матрица):

$$\begin{gathered}\mathbf{M}'_N(S,\omega_N)=\mathbf{H}_N(S,\omega_N)\mathbf{M}_N(S,\omega_N);\\ \mathbf{M}_N(S_1)=\mathbf{E}.\end{gathered} \qquad (12)$$

Отметим, что построенный таким образом вектор $\mathbf{X}_N(S,\omega_N)$ удовлетворяет только системе дифференциальных уравнений в (10). При этом $\mathbf{M}_N$ является нормированной интегральной матрицей [3] системы дифференциальных уравнений в (10).

Подстановка вектора (11) в граничные условия в составе соотношений (10) приводит к разрешающей задачу системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\mathbf{X}_{1,N}$:

$$\mathbf{C}(\omega_N)\mathbf{X}_{1,N}=\mathbf{0},\quad \mathbf{C}(\omega_N)=\left(\frac{\mathbf{H}_{1,N}(\omega_N)}{\mathbf{H}_{2,N}(\omega_N)\mathbf{M}_N(S_2,\omega_N)}\right). \qquad (13)$$

Таким образом, краевая задача (10) сводится к двенадцати задачам Коши на полуинтервале $S\ge S_1$ относительно *12* столбцов матрицы $\mathbf{M}_N$, вытекающим из уравнений (10). Эти задачи далее запишем в единой форме:

$$\mathbf{y}'(S)=\mathbf{A}(S,\omega)\mathbf{y}(S);\qquad \mathbf{y}(S_1)=\mathbf{y}_0. \qquad (14)$$

Решение задач (14) может быть выполнено любым численным [5] или аналитическим [6] методом. В связи с нелинейностью зависимости матричной функции дискретного аргумента $\mathbf{C}(\omega_N)$ и неизвестностью собственных значений $\omega_N$ задачи Коши (14) принципиально важны, так как они позволяют рассчитать континуальный аналог $\mathbf{C}(\omega)$ и построить скалярную частотную функцию $\det(\omega)$, нули которой являются искомыми значениями частот собственных колебаний стержней $\omega_N$

При решении задач механики в изложенных соотношениях решения начально-краевой задачи математической физики (соотношения 14) изменяется лишь форма матрицы коэффициентов, которая явно зависит также и от вектора исходных данных в соотношениях (1-3). Применительно к таким задачам соотношения (14) могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{y}'(S)=\mathbf{A}(S,\omega,\boldsymbol{\mu})\mathbf{y}(S);\qquad \mathbf{y}(S_1)=\mathbf{y}_0. \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – вектор исходных данных задачи деформирования стержня.

При решении задачи необходимо провести масштабирование коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$. Для масштабирования линейных величин $S,\mathbf{U},\mathbf{R}$ используется длина стержня $S_0=S_2-S_1$, внутренние усилия $\mathbf{N}$ масштабируемые величиной $\frac{S_0^2}{EJ_0}$, моменты внутренних сил – величиной $\frac{S_0}{EJ_0}$, время и частота колебаний масштабируется величиной $\frac{EJ_0}{\rho F_0 S_0^4}$. Здесь $EJ_0$ – эталонная жесткость сечения на изгиб, $\rho$ – плотность материала, $F_0$ – эталонная площадь сечения стержня.

При анализе влияния изменения параметров сечений на динамические характеристики стержней рассмотрено призматическое прямоугольное сечение с размерами, определяемыми функциями

$$\begin{gathered}h(S)=1+k_h f_h(S);\\ b(S)=1+k_b f_b(S).\end{gathered} \qquad (16)$$

где безразмерная высота сечения $h$ масштабируется к высоте $h_0$ эталонного сечения, а ширина сечения $b$ – к ширине $b_0$ эталонного сечения. Рассмотрены 12 видов функций изменения параметров сечений стержней *f(S)* от *f(S)*=1 до случайной функции. В качестве обычных рассматриваются одно и многопрофильные, стационарные, прогрессивные и регрессивные, четные и нечетные тригонометрические функции.

Во всех проведенных расчетах решению краевых задач предшествовал анализ ортогональности нормированных интегральных матриц исходных и сопряженных дифференциальных уравнений. Для уточнений нулей частотных функций использовалось локальное кубическое сплайнирование.

При иллюстрации результатов расчетов за эталонные принимались расчеты при значениях $k_h=0;\ k_b=0.$ Влияние изменения параметров сечения стержня на их динамические характеристики определяется в результате построения функций относительного изменения динамических характеристик стержней. Распределение жесткостей стержней определялось использованными функциями $f_h(S),\ f_b(S)$.

В результате данных расчетов было установлено, что изменение параметров сечений стержней приводит к:

1) - ухудшению обусловленности краевой задачи, качественно более резкой при попе-

речных колебаниях;

2) - при поперечных колебаниях влияние изменяемости параметров сечений в $\left(\frac{S_0}{h_0}\right)^2$ раз больше, чем при продольных колебаниях, где $h_0 = \max(k_h, k_b)$;

3) - по мере увеличения частоты колебаний относительные погрешности расчета форм колебаний по обобщенным перемещениям растут в $\frac{S_0}{h_0}$ медленнее роста погрешности расчета форм колебаний по обобщенным усилиям;

4) - влияние зависит от формы сечения и характеристик изменяемости по каждому из измерений сечения отдельно;

5) - для расчета любых высокочастотных колебаний необходима разработка специальных процедур решения задач на собственные значения;

Для иллюстрации этих результатов на рис. 1 показано относительное изменение ортогональности нормированных интегральных матриц систем дифференциальных уравнений в (10) *dort(S)* по длине двусторонне жестко защемленного бруса. Расчет проведен для продольных колебаний бруса при значении частотного параметра $\omega = 50$ и относительной амплитуде начальных несовершенств квадратного сечения $k_h = k_b = 0.2$. Гармоническая функция изменяемости параметров сечений представлялась в виде: $f_h(S) = f_b(S) = \cos(2\pi\Omega S)$ с числом несовершенств геометрии сечения на длине элемента, равным $\Omega = 50$.

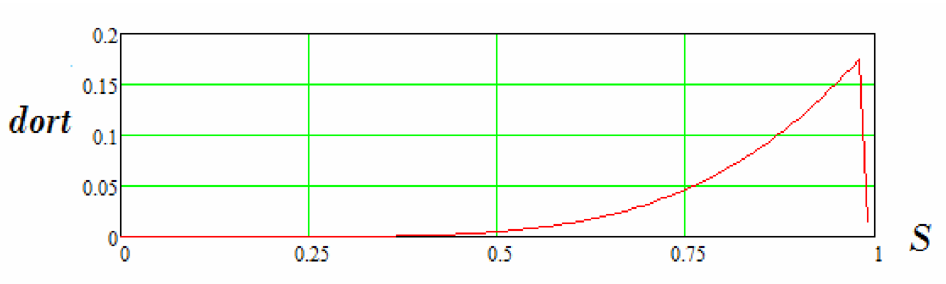


Рис. 1. Относительное изменение ортогональности нормированных интегральных матриц систем дифференциальных уравнений в (10) *dort(S)* по длине двусторонне жестко защемленного бруса для продольных колебаний бруса.

На рис. 2 представлено относительное изменение формы собственных колебаний этого бруса для первых пяти форм по продольным перемещениям сечений бруса dU(S) при обычном для вычислительной практики пренебрежении влиянием изменения обусловленности задачи на собственные значения.

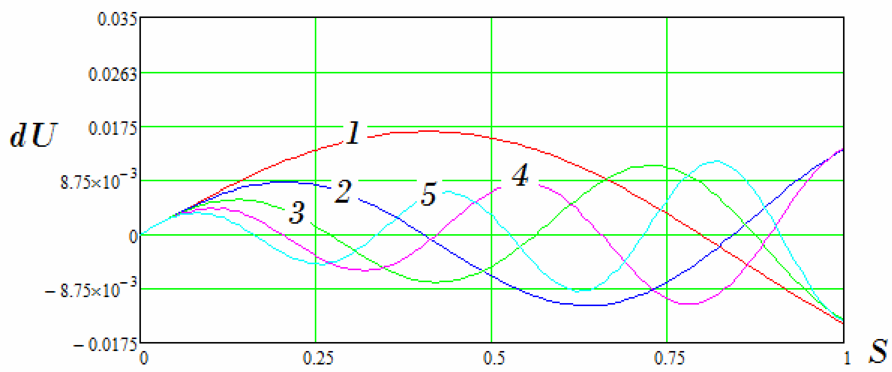


Рис. 2. Относительное изменение форм собственных колебаний этого бруса для первых пяти форм по продольным перемещениям сечений бруса dU(S).

На рис. 3 показано относительное изменение ортогональности нормированных интегральных матриц, аналогичное представленному изменению на рис. 1, для аналогично закрепленного полукольца с относительной высотой сечения в 25 раз меньшим прямого бруса.

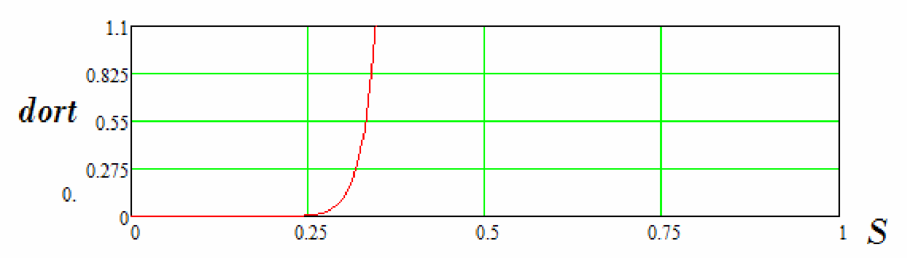


Рис. 3. Относительное изменение ортогональности нормированных интегральных матриц, аналогичное представленному изменению на рис. 1, для аналогично закрепленного полукольца с относительной высотой сечения в 25 раз меньшим прямого бруса.

На рис. 4 показано соответствующее изменение форм собственных колебаний этого кольца для первых пяти форм по поперечным перемещениям сечений *dW(S)* также при обычном для вычислительной практики пренебрежении влиянием изменения обусловленности задачи на собственные значения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №11-08-00504-а).*

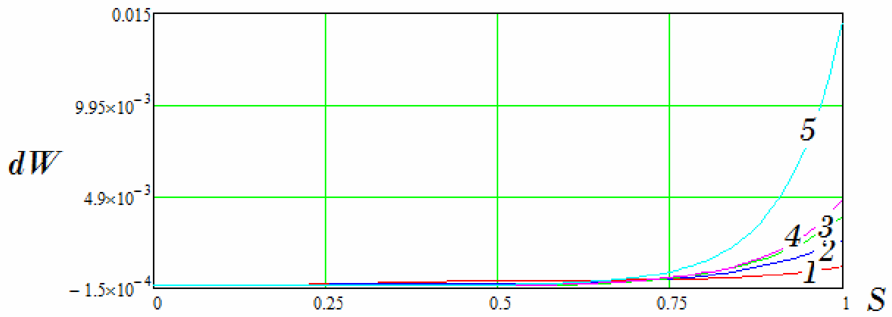


Рис. 4. Изменение форм собственных колебаний кольца для первых пяти форм по поперечным перемещениям сечений *dW(S).*

## ЛИТЕРАТУРА:


1. Грудев И.Д. Колебания криволинейных стержней. – М.: МИК, 2007. 256 с.
2. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение, 1973. 260 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
4. Келлер Д.Б. Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Д.Б. Келлер, С.М.Антман. – М.: Мир, 1974. С. 19–34.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. 512 с.
6. Горшков А.А., Коровайцева Е.А. О решении задачи Коши с помощью решетчатых функций в математической физике и химической кинетике // Вестник МИТХТ. 2009. Т. 4. № 3. С. 22–26.