

## ТЕОРИЯ ТЕПЛООВОГО УДАРА НА ОСНОВЕ ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: kartashov@mitht.ru

**И**сследована динамическая термоупругая реакция области, ограниченной внутри различными геометрическими поверхностями: плоской, сферической, цилиндрической. Сформулирована обобщённая динамическая модель термоупругости для этих случаев.

The dynamic thermoelastic response of an area within a limited variety of geometric surfaces (planar, spherical, and cylindrical) was explored. A generalized dynamic model of thermoelasticity was formulated for these cases.

**Ключевые слова:** термоупругость, динамическая постановка, напряжения.

**Key words:** thermoelasticity, dynamic posing, stress.

Проблема термического удара – одна из центральных в термомеханике. Её исследования на основе моделей динамической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряжённого состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классических феноменологий Фурье и Максвелла-Каттанео-Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твёрдых телах; развита обобщённая теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учётом тепловой памяти. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в обзорах автора [1, 2] и монографии [3].

Настоящая статья продолжает исследования в этой области. Изучается термическая динамическая реакция на тепловой удар бесконечной области, ограниченной изнутри либо плоской поверхностью, либо сферической, либо цилиндрической. Выясняется влияние геометрического фактора граничной поверхности на величину термоупругих напряжений. Исследования проводятся в рамках обобщённой динамической модели, разработанной для этих слу-

чаев и представляющей самостоятельный интерес для термоупругости.

Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x, y, z)$ , находящаяся в условиях термонапряжённого состояния,  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к  $S$ ,  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ,  $T_0$  – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряжённом состоянии. Пусть  $\sigma_{ik}(M, t)$ ,  $\varepsilon_{ik}(M, t)$ ,  $U_i(M, t)$  ( $i, k = x, y, z$ ) – соответственно, компоненты тензоров напряжения, деформации и перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям термомеханики [3, 4]:

уравнениям движения

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}(M, t)}{\partial k} = \rho \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2}, \quad M \in D, \quad t > 0 \quad (1)$$

где  $\rho$  – масса единицы объёма ( $i, k = x, y, z$ );

геометрическим уравнениям

$$\varepsilon_{ik}(M, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i(M, t)}{\partial k} + \frac{\partial U_k(M, t)}{\partial i} \right] \quad (2)$$

физическим уравнениям (уравнениям закона Гука)

$$\sigma_{ik}(M, t) = 2G \left[ \varepsilon_{ik}(M, t) + \frac{\nu}{1-2\nu} e(M, t) \delta_{ik} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ik} \right], \quad (3)$$

где  $G$  – модуль сдвига, при этом  $2G(1+\nu) = E$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера

$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases}$   $\alpha_T$  – коэффициент линейного

теплового расширения,  $e(M, t) = \text{div} [U^V(M, t)] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$  – объёмная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\sigma(M, t) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  соотношением

$$e(M, t) = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} \sigma(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0] \quad (4)$$

Приведённые уравнения термоупругости (1)–(4) запишем в перемещениях. Подставляя

правые части (3) в (1) и используя далее (2), (4) после ряда длительных преобразований приходим к соотношению

$$\Delta U^V(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \text{grad} [\text{div} U^P(M, t)] - \left( \frac{\rho}{G} \right) \frac{\partial^2 U^P(M, t)}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \text{grad} [T(M, t) - T_0] \quad M \in D, \quad t > 0. \quad (5)$$

Как указывалось, рассматривается бесконечная область, ограниченная изнутри либо плоской поверхностью (случай 1), либо сферической поверхностью (случай 2), либо цилиндрической поверхностью (случай 3). В первом случае в декартовых координатах  $(x, y, z)$

рассматривается область  $z > R$ ,  $t > 0$ , температурное состояние которой описывается функцией  $T_1 = T_1(z, t)$ , при этом  $U_x = U_y = 0$ ,  $U_z = U_z(z, t)$ . Во втором случае в сферических координатах  $(\rho, \varphi, \theta)$  рассматривается область  $\rho > R$ ,  $t > 0$  при нагреве в условиях центральной симметрии  $T_2 = T_2(\rho, t)$ , так что  $U_\varphi = U_\theta = 0$ ,  $U_\rho = U_\rho(\rho, t)$ . В третьем случае в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  рассматривается область  $r > R$ ,  $t > 0$  в условиях нагрева радиальным потоком теплоты  $T_3 = T_3(r, t)$ ,

так что  $U_\varphi = U_z = 0$ ,  $U_r = U_r(r, t)$ . Во всех трёх случаях тепловой удар создаётся внезапным нагревом граничной поверхности до температуры  $T_c > T_0$  ( $T_c = const$ ), что приводит к условиям симметрии и необходимости учитывать инерционные члены в (1). Последнее означает рассмотрение динамической задачи (и именно) в перемещениях с целью одновременно охватить все три случая. В указанных условиях температурного состояния всех трёх областей обобщённое уравнение (5) следует записать в виде:

$$\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \mathbf{grad}[\mathit{div} \mathit{U}(M, t)] - \left(\frac{\rho}{G}\right) \frac{\partial^2 \mathit{U}(M, t)}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \mathbf{grad}[T(M, t) - T_0] \quad (6)$$

В первом случае соотношение (6) даёт:

$$\frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z}, \quad z > R, \quad t > 0. \quad (7)$$

Во втором случае получаем:

$$\frac{\partial^2 U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} U_\rho(\rho, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_\rho(\rho, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial T_2(\rho, t)}{\partial \rho}, \quad \rho > R, \quad t > 0. \quad (8)$$

В третьем случае

$$\frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial T_3(r, t)}{\partial r}, \quad r > R, \quad t > 0. \quad (9)$$

Здесь  $v = \sqrt{\frac{2(1-\nu)\rho}{(1-2\nu)G}}$  – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Для записи обобщённой модели во избежание излишней громоздкости введём следующие безразмерные переменные.

В области  $z > R$ ,  $t > 0$ :

$$\xi = \frac{vz}{a}; \quad \tau = \frac{v^2 t}{a}; \quad W_1(\xi, \tau) = \frac{T_1(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad \gamma = \frac{vR}{a}, \quad \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_c - T_0)} \quad (10)$$

$$U_1(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)U_z(z, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a/v)}, \quad S = \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} = \frac{2G(1+\nu)\alpha_T}{1-2\nu};$$

В области  $\rho > R$ ,  $t > 0$ :

$$\xi = \frac{vR}{a}; \quad \tau = \frac{v^2 t}{a}; \quad W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(\rho, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad (11)$$

$$U_2(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)U_\rho(\rho, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a/v)}, \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{S(T_c - T_0)};$$

В области  $r > R$ ,  $t > 0$ :

$$\xi = \frac{vr}{a}; \quad \tau = \frac{v^2 t}{a}; \quad W_3(\xi, \tau) = \frac{T_3(r, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad (12)$$

$$U_2(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)U_r(r, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a/v)}, \quad \sigma_{\xi\xi}^{(3)}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{S(T_c - T_0)}.$$

Теперь можно записать обобщённую модель задачи, предполагая границы областей свободными от напряжений.

$$\frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \left[ \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{U_i(\xi, \tau)}{\xi} \right] - \frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \xi > \gamma, \quad \tau > 0, \quad (13)$$

$$U_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq \gamma, \quad (14)$$

$$\left[ \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{(2m+1)\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\xi} U_i(\xi, \tau) \right]_{\xi=\gamma} = W_i(\xi, \tau)|_{\xi=\gamma} \quad (15)$$

$$|U_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq \gamma, \quad \tau \geq 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \xi > \gamma, \quad \tau > 0, \quad (17)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq \gamma \quad (18) \qquad W_i(\xi, \tau)|_{\xi=\gamma} = 1, \quad \tau > 0 \quad (19)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq \gamma, \quad \tau \geq 0. \quad (20)$$

Здесь:  $i = 1$  при  $m = -1/2$ ;  $i = 2$  при  $m = 1/2$ ;  $i = 3$  при  $m = 0$ .

Для нахождения искомым величин введём преобразование Лапласа

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_i(\xi, p) &= \int_0^\infty U_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau \\ \bar{W}_i(\xi, p) &= \int_0^\infty W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Применяя (21) к (13)–(20) находим в пространстве изображений искомые величины в виде следующих соотношений (здесь опускаются все промежуточные преобразования, учитывая их длительность и громоздкость):

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{W}_1(\xi, p) &= \frac{1}{p} \exp[-(\xi - \gamma)\sqrt{p}] \\ \bar{U}_1(\xi, p) &= \frac{1}{p(1-p)} \left\{ \exp[-(\xi - \gamma)p] - \frac{1}{\sqrt{p}} \exp[-(\xi - \gamma)\sqrt{p}] \right\}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, p) &= \frac{d\bar{U}_1(\xi, p)}{d\xi} - \bar{W}_1(\xi, p); \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{W}_2(\xi, p) &= \frac{1}{p} \frac{\gamma}{\xi} \exp[-(\xi - \gamma)\sqrt{p}] \\ \bar{U}_2(\xi, p) &= \frac{\gamma}{p^2(p-1)} \frac{1}{\xi^2} \left\{ (1 + \xi\sqrt{p}) \exp[-(\xi - \gamma)\sqrt{p}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{[2(1-2\nu)(1 + \gamma\sqrt{p}) + (1-\nu)\gamma^2 p^2](1 + \xi p)}{2(1-2\nu)(1 + \gamma p) + (1-\nu)\gamma^2 p^2} \exp[-(\xi - \gamma)p] \right\}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, p) &= \frac{d\bar{U}_2(\xi, p)}{d\xi} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi} \bar{U}_2(\xi, p) - \bar{W}_2(\xi, p); \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{W}_3(\xi, p) &= \frac{1}{p} \frac{K_0(\xi\sqrt{p})}{K_0(\gamma\sqrt{p})}, \\ \bar{U}_3(\xi, p) &= \frac{(1-2\nu)}{\gamma(1-\nu)} \frac{K_1(p\xi)K_1(\gamma\sqrt{p})}{p\sqrt{p}(1-p)K_0(\gamma\sqrt{p})A(p)} + \frac{K_1(p\xi)}{(1-p)A(p)}, \\ \bar{A}(p) &= pK_0(p\gamma) + \frac{1-2\nu}{\gamma(1-\nu)} K_1(p\gamma), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(3)}(\xi, p) &= \frac{d\bar{U}_3(\xi, p)}{d\xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\bar{U}_3(\xi, p)}{\xi} - \bar{W}_3(\xi, p). \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Здесь  $K_\nu(z)$  – модифицированные функции Бесселя. При нахождении общего решения уравнения (13) (в пространстве изображений) появляются технические трудности в получении частного решения неоднородного уравнения  $\bar{U}_{ин}$ . С этой целью рассмотрим приём для случая  $m=0$ , представляющий интерес для теории обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2 \bar{U}_3}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\bar{U}_3}{d\xi} - \left( p^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) \bar{U}_3 = \frac{d\bar{W}_3}{d\xi}, \quad \xi > \gamma. \quad (25)$$

Функцию  $(\bar{U}_3)_{ин}$  ищем в виде

$$[\bar{U}_3(\xi, p)]_{ин} = B \frac{d\bar{W}_3(\xi, p)}{d\xi}, \quad (26)$$

где  $B$  – постоянная величина. Функция  $\bar{W}_3(\xi, p)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \bar{W}_3(\xi, p) = p \bar{W}_3(\xi, p) \quad (27)$$

Имеем из (27) и (25):

$$\Delta \left( \frac{d\bar{W}_3}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} (\Delta \bar{W}_3) + \frac{1}{\xi^2} \frac{d\bar{W}_3}{d\xi}, \quad (28)$$

$$\left( \Delta \bar{U}_3 - \frac{1}{\xi^2} \bar{U}_3 \right) - p^2 \bar{U}_3 = \frac{d\bar{W}_3}{d\xi} \quad (29)$$

Подставляя (26) в (29) и учитывая (28) и (27), находим постоянную  $B = [p(1-p)]^{-1}$  и вместе с этим величину (26). Вычисление оригиналов в (22)–(24) оказывается весьма трудоемким и приводит к сложным и трудно-

$$\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) = [\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)]_{(1)} + \begin{cases} 0, & \tau < \xi - \gamma \left( t < \frac{z-R}{v}, \text{К К} \right), \\ [\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)]_{(2)}, & \tau > \xi - \gamma \left( t > \frac{z-R}{v}, \text{К К} \right), \end{cases} \quad (31)$$

где  $[\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)]_{(1)}$  – оригинал изображения, содержащего множитель  $\exp[-(\xi-\gamma)\sqrt{p}]$ ;  $[\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)]_{(2)}$  – оригинал изображения, содержащего множитель  $\exp[-(\xi-\gamma)p]$ . На рис. 1 приведены кривые изменения напряжения  $\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)$  ( $i=1,2,3$ ) со временем в сечении  $\xi = 2$  при  $\gamma = 1$ .

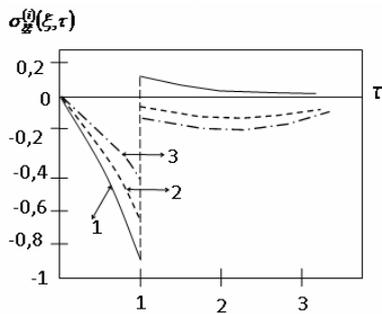


Рис. 1. Изменение напряжения  $\sigma_{\xi\xi}^{(i)}$  со временем в сечении  $\xi = 2$  при  $\gamma = 1$  (1 – для  $i=1$ ; 2 – для  $i=2,3$ ; 3 – для  $i=3$ ).

Как видно из (31), составляющая напряжения, выражаемая функцией  $(\sigma_{\xi\xi}^{(i)})_{(2)}$ , представляет собой продольную упругую волну, фронт которой движется со скоростью  $v$  от граничной поверхности внутрь области.

обозримым выражениям (эту проблему автор оставляет на усмотрение заинтересованным читателям). В данном случае для проведения расчётов численным методом воспользуемся контурным интегралом Римана - Меллина.

$$\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, p) \exp(\xi p) dp; \quad (30)$$

$$(i=1,2,3)$$

Как следует из (22) – (24), структура величин  $\sigma_{\xi\xi}^{(i)}(\xi, \tau)$  имеет следующий вид

Рассмотрим произвольную внутреннюю точку  $\xi > \gamma$ . Вначале в ней возникает только составляющая напряжения, соответствующая функции  $(\sigma_{\xi\xi}^{(i)})_{(1)}$ , и напряжение растёт от нуля до некоторого (максимального) отрицательного значения, оставаясь сжимающим. В момент времени  $\tau = \xi - \gamma$  к этой точке приходит волна напряжения, соответствующая функции  $(\sigma_{\xi\xi}^{(i)})_{(2)}$  и напряжение скачкообразно возрастает, переходит в область положительных (растягивающих) значений для  $i=1$ , оставаясь сжимающим для  $i=2,3$ , и затем убывает до нуля, достигая квазистатических значений. Полученные кривые наглядно показывают влияние геометрии ограничивающей внутренней поверхности при тепловом ударе на характер изменения напряжений. Наличие плоской поверхности приводит к напряжениям растяжения и возможному трещинообразованию в приповерхностных слоях. Аналогичным образом могут быть исследованы остальные компоненты напряжений по формулам термоупругости, приведённым в [3].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии (обзор) // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений. – М.: ВИНТИ, 1988. Т. 25. С. 3–88.
2. Карташов Э.М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара (обзор) // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. – Самара: Изд-во СГТУ, 2010. 970 с.
4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физмат, 1963. 252 с.