УДК 539.3

НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Э.М. Карташов, профессор

Кафедра высшей и прикладной математики,
Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий),
Москва, 119571 Россия
@*Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru*

Рассмотрен новый класс модельных представлений в теории колебаний систем, описываемых классическими краевыми задачами для уравнений гиперболического типа. Особенность предложенного подхода заключается во введении в основное уравнение колебаний дополнительного слагаемого, характеризующего наличие в системе градиента температуры. Развитая теория касается продольных колебаний стержня, но с одинаковым успехом может быть распространена на задачи о колебаниях струны, мембраны, крутильных колебаний вала, электромагнитных колебаний и т.д. Проведены численные эксперименты, показавшие существенное влияние температурного поля в стержне на характер колебаний и смещений сечений стержня по сравнению с классическими решениями.

Ключевые слова: *стержень, продольные колебания, градиент температуры, смещения.*

NEW MODEL IDEAS IN THE THEORY OF OSSILATION

E.M. Kartashov

Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies),
Moscow, 119571 Russia
@*Corresponding author e-mail: burliaevv@yandex.ru*

The article considers a new class of model representations in the theory of oscillation of systems described by the classical boundary value problems for hyperbolic equations. The peculiarity of the suggested approach consists in the introduction of an additional term into the basic equation of oscillations. This term characterizes the presence of a temperature gradient in the systems. The developed theory is applicable to longitudinal oscillations of a rod, but can be extended just as well to the problem of the vibrations of strings, membranes, shaft torsional oscillations, electromagnetic waves, etc. Numerical experiments showed a significant effect of the temperature field in the rod on the nature of the vibrations and displacements of the rod cross-sections in comparison with classical solutions.

Keywords: *rod, longitudinal vibrations, temperature gradient, offset.*

Простейшие задачи математической физики, касающиеся свободных или вынужденных колебаний струны, продольных колебаний стержня, поперечных колебаний мембраны, крутильных колебаний вала и т.д., приводят к уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

при неизменных температурных условиях ($T = const$), вызывающих отклонение $u(x, t)$ системы от положения равновесия [1].

Настоящая публикация касается сравнительно нового вопроса в теории колебаний, когда колебания в системе усложняются наличием в ней градиента температуры. Для определенности рассматриваются продольные колебания однородного стержня с поперечным сечением S цилиндрической или какой-либо иной формы, для растяжения или сжатия которого необходимо приложить известное усилие. Опишем продольные колебания стержня при наличии в нем $\mathbf{grad}T(x, t)$, предполагая, что силы действуют вдоль оси стержня (ось x) и каждое из поперечных сечений стержня перемещается поступательно только вдоль оси стержня. Обычно это предположение оправдывается, если поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной, а силы, действующие вдоль оси стержня, сравнительно невелики. В противном случае, как известно [2], стержень может начать изгибаться. В курсе сопротивления материалов устанавливается, что наименьшая нагрузка P, при которой стержень может принять устойчивое изогнутое положение (критическая нагрузка), определяется по формуле Эйлера $P = \pi^2 EJ/l^2$, где E – модуль Юнга, J – момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести, l – длина стержня. Этот случай не рассматривается.

Выведем дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня при наличии в нем температурного поля $T(x, t)$. В основу вывода положим закон Гука и второй закон Ньютона.

Пусть x – абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое; $u(x, t)$ – смещение этого сечения в момент времени t. Тогда смещение сечения с абсциссой $(x + \Delta x)$ будет равно (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$u(x+\Delta x,t)=u(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta x \,. \tag{2}$$

Отсюда следует, что относительное удлинение участка стержня в сечении с абсциссой x в момент времени $t > 0$ равно $\partial u(x,t)/\partial x$. Согласно закону Гука, напряжение, вызванное действием некоторой силы F, пропорционально величине деформации

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \tag{3}$$

где $\varepsilon = \partial u/\partial x$ – деформация. Пусть $T(x, t)$ – температурное поле в стержне, T_0 – начальная температура. Очевидно, что при изменении температуры стержня от T_0 до $T(x, t)$ в сечении стержня с абсциссой x возникает относительное удлинение (температурная деформация) $\varepsilon = \alpha[T(x,t) - T_0]$, где α – коэффициент линейного теплового расширения. Сила, действующая на элементарном участке $[x + \Delta x]$ стержня, равна произведению площади поперечного сечения на разность напряжений в сечениях:

$$\begin{gathered} F = S(\sigma_{x+\Delta x}-\sigma_x) = SE\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+ \\ +SE\alpha\left\{\left[T(x+\Delta x,t)-T_0\right]-\left[T(x,t)-T_0\right]\right\} = \\ = SE\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+SE\alpha\Delta x\frac{\partial\left[T(x,t)-T_0\right]}{\partial x}. \end{gathered} \tag{4}$$

Согласно второму закону Ньютона

$$F = m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \rho S\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{5}$$

где ρ – плотность материала стержня. Теперь на основании (4)–(5) находим (новое) дифференциальное уравнение продольных колебания однородного стержня при наличии в стержне градиента температуры:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+a_0^2\alpha\frac{\partial\left[T(x,t)-T_0\right]}{\partial x}, \tag{6}$$

где $a_0^2 = E/\rho$ ($[a_0^2] = м^2/c^2$; $[u] = м$).

Остановимся подробнее на дифференциальном уравнении теплопроводности для температурной функции $T(x, t)$. Можно предположить, что колебания стержня происходят в окружающей стержень среде, температура которой T_c может не совпадать с начальной температурой стержня T_0, и через боковую поверхность происходит теплообмен со средой. В этом случае уравнение теплопроводности запишется в виде [3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-m^2\left[T(x,t)-T_c\right], \tag{7}$$

где $m^2 = \alpha_T P/(c\rho S)$, P – периметр поперечного сечения стержня, α_T – коэффициент теплообмена в законе Ньютона ($[\alpha_T] = Дж/(см^2\ град)$, $[m^2] = 1/c$).

В качестве иллюстрации полученных соотношений рассмотрим случай, когда конец $x = 0$ цилиндрического стержня настолько длинный, что его можно считать простирающимся в одну сторону до бесконечности, перемещается по гармоническому закону $A\sin\omega t$ при нулевых начальных условиях для $x > 0$ (перемещение конца стержня по закону $A\sin\omega t$ вызывает продольная сила $F(t) = (AES\omega/a_0)\cos\omega t$, приложенная к торцу $x = 0$). Одновременно стержень находится в условиях температурного нагрева с торца $x = 0$ температурой T_c, отличной от начальной T_0 ($T_c > T_0$), и при этом имеет место теплообмен через боковую поверхность стержня со средой температуры T_c. Таким образом, в стержне вдоль его текущей толщины возникает температурное поле $T(x, t)$, влияющее на колебания. Требуется описать продольные колебания стержня при сформулированных условиях.

Соответствующая математическая модель имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_0^2\alpha\frac{\partial(T-T_0)}{\partial x},\ x>0,\ \ t>0, \tag{8}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0\,,\ \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\,,\ \ x \ge 0\,, \tag{9}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = A\sin\omega t\,,\ t > 0\,,\ \ |u(x,t)| < \infty\,,\ \ x \ge 0\,,\ \ t \ge 0\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - m^2\left(T - T_c\right),\ x > 0,\ t > 0\,, \tag{11}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0\,,\ x \ge 0\,, \tag{12}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_c\,,\ t > 0\,.\ |T(x,t)| < \infty\,,\ x \ge 0\,,\ t \ge 0\,. \tag{13}$$

В (8)–(13) перейдем к безразмерным переменным:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = x/l,\ \tau = a_0 t/l,\ u^*(\xi,\tau) = \frac{u(x,t)}{\alpha l(T_c - T_0)}, W(\xi,\tau) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_c - T_0},\\ &A_0 = \frac{A}{\alpha l(T_c - T_0)}, m_1^2 = \frac{a}{a_0 l}, m_2^2 = \frac{m^2 l}{a_0}, m_3 = \frac{\omega l}{a_0}; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Здесь l – масштабная единица длины.

Задача (8)–(13) будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial W}{\partial \xi},\ \ \xi > 0,\ \ \tau > 0,\\ &u^*(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u^*(\xi,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0,\ \ \xi \ge 0\\ &u^*(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0} = A_0 \sin m_3\tau,\ \tau > 0,\ \ |u^*(\xi,\tau)| < \infty\ \ \xi \ge 0,\ \ \tau \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \tau} = m_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - m_2^2\left(W - 1\right),\ \ \xi > 0,\ \ \tau > 0,\\ &W(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0} = 0,\ W(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0} = 1,\ |W(\xi,\tau)| < \infty\ \ \xi \ge 0,\ \ \tau \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Операционное (по Лапласу) решение задачи (15)–(16) относительно функции $\bar{u}^*(\xi,p) = \int\limits_0^\infty \exp(-p\tau)\cdot u^*(\xi,\tau)d\tau$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}^*(\xi,p) = &\frac{m_1}{\sqrt{1+4m_1^2 m_2^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{p + m_2^2(p - p_1)}} - \frac{1}{\sqrt{p + m_2^2(p - p_2)}}\right]\times\\ &\times\exp(-p\xi) + \frac{A_0 m_3}{p^2 + m_3^2}\exp(-p\xi) - \frac{m_1}{\sqrt{1+4m_1^2 m_2^2}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{p + m_2^2(p - p_1)}}\exp\left[-\sqrt{p + m_2^2}\left(\xi/m_1\right)\right] - \right.\\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{p + m_2^2(p - p_2)}}\exp\left[-\sqrt{p + m_2^2}\left(\xi/m_1\right)\right]\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Переходя к оригиналам [4], находим:

$$u^*(\xi,\tau)=u_1^*(\xi,\tau)+u_2^*(\xi,\tau)\eta(\tau-\xi)\ , \tag{18}$$

где $\eta(z)$ – функция Хевисайда.

Здесь:

$$u_1^*(\xi,\tau)=-\frac{m_1}{\sqrt{1+4m_1^2m_2^2}}\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{1}{2\sqrt{m_2^2+p_k}}\exp(p_k\tau)\times\right.$$
$$\times\left[\exp\left(-\sqrt{m_2^2+p_k}\,\xi/m_1\right)\Phi^*\left(\frac{\xi}{2m_1\sqrt{\tau}}-\sqrt{(m_2^2+p_k)\tau}\right)-\right. \tag{19}$$
$$\left.\left.-\exp\left(\sqrt{m_2^2+p_k}\,\xi/m_1\right)\Phi^*\left(\frac{\xi}{2m_1\sqrt{\tau}}+\sqrt{(m_2^2+p_k)\tau}\right)\right]\right\},$$

$$u_2^*(\xi,\tau)=\frac{m_1}{\sqrt{1+4m_1^2m_2^2}}\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{1}{2\sqrt{m_2^2+p_k}}\exp[p_k(\tau-\xi)]\times\right.$$
$$\left.\times\Phi\left(\sqrt{(m_2^2+p_k)(\tau-\xi)}\right)\right\}+A_0\sin m_3(\tau-\xi); \tag{20}$$

$p_{1,2}=\left(1\pm\sqrt{1+4m_1^2m_2^2}\right)/\left(2m_1^2\right)$, $\Phi^*(z)=1-\Phi(z)$; $\Phi(z)=\left(2/\sqrt{\pi}\right)\int_0^z\exp\left(-y^2\right)dy$ – функция Лапласа.

Если в (16) пренебречь теплообменом через боковую поверхность $m_2^2=0$ (за счет термоизоляции боковой поверхности стержня или малой величины m_2^2), то функции в (18) будут иметь вид:

$$u_1^*(\xi,\tau)=-\frac{m_1^2}{2}\exp\left(\tau/m_1^2\right)\left[\exp\left(-\xi/m_1^2\right)\Phi^*\left(\frac{\xi}{2m_1\sqrt{\tau}}-\frac{\sqrt{\tau}}{m_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp\left(\xi/m_1^2\right)\Phi^*\left(\frac{\xi}{2m_1\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\tau}}{m_1}\right)\right]+\frac{2m_1\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4m_1^2\tau}\right)-\frac{\xi}{m_1}\Phi^*\left(\frac{\xi}{2m_1\sqrt{\tau}}\right); \tag{21}$$

$$u_2^*(\xi,\tau)=m_1^2\exp\left(\frac{\tau-\xi}{m_1^2}\right)\Phi\left(\frac{\sqrt{\tau-\xi}}{m_1}\right)-\frac{2m_1^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\tau-\xi}+A_0\sin m_3(\tau-\xi). \tag{22}$$

Если в постановке задачи (8)–(13) исключить влияние градиента температуры ($T = const$ – классический случай), то перемещение сечения стержня с абсциссой ξ описывается формулой:

$$\tilde{u}^*(\xi,\tau)=[A_0\sin m_3(\tau-\xi)]\eta(\tau-\xi) \tag{23}$$

Рассмотрим еще один практически важный случай, когда к концу стержня $x > 0$ приложена продольная сила $P = const$, так что $\left[\partial u(x,t)/\partial x\right]\Big|_{x=0}=-P/(ES)$, $t > 0$, или в переменных (ξ, τ)

$$\left.\frac{\partial u^*(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=(-A_0),\ \tau>0\ ,\ \left(A_0=\frac{P}{\alpha(T_c-T_0)ES}\right). \tag{24}$$

Функция смещения $u^*(\xi,\tau)$ имеет вид (18), где $u_1^*(\xi,\tau)$ – выражение (19),

$$u_2^*(\xi,\tau)=A_0(\tau-\xi)+\frac{1}{\sqrt{1+4m_1^2m_2^2}}\left\{\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1}{p_1}\exp[p_1(\tau-\xi)]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{p_2}\exp[p_2(\tau-\xi)]\right\}, \tag{25}$$

числа p_1 и p_2 приведены выше.

В случае отсутствия градиента температуры решение имеет вид:

$$\tilde{u}^*(\xi,\tau)=A_0(\tau-\xi)\eta(\tau-\xi) \tag{26}$$

Рисунки 1–4 раскрывают количественно влияние температурного поля в стержне на характер продольных колебаний.

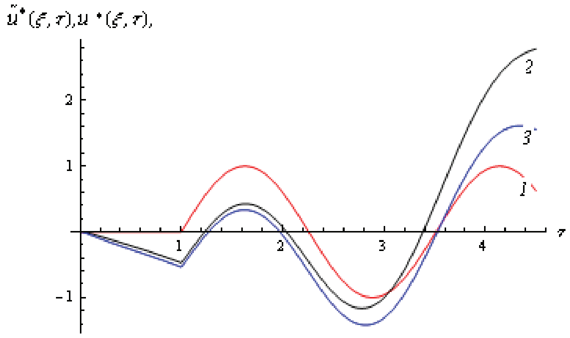

Рис. 1. Кривая *1* – $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$ (решение (23)), кривые *2*, *3* – $u^*(\xi,\tau)$ (решение (18)): *2* – $m_1^2=1.8$, *3* – $m_1^2=2.4$. $\xi=1$, $m_3=2.5$, $A_0=1$; $m_2^2=0.1$.

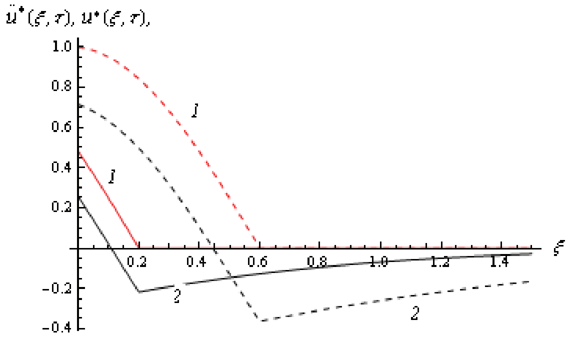

Рис. 2. Кривые *1* – $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$ (решение (23)), кривые *2* – $u^*(\xi,\tau)$ (решение (18)): $m_1^2=1.8$, $m_3=2.5$, $A_0=1$; $m_2^2=0.1$. сплошные $\tau=0.2$, пунктирные $\tau=0.6$.

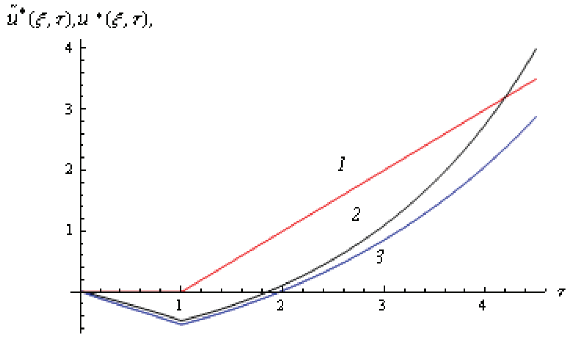

Рис. 3. Кривая *1* – $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$ (решение (26)), кривые *2*, *3* – $u^*(\xi,\tau)$ (решение (18), (19), (25)): *2* – $m_1^2=1.8$, *3* – $m_1^2=2.4$. $\xi=1$, $A_0=1$; $m_2^2=0.1$.

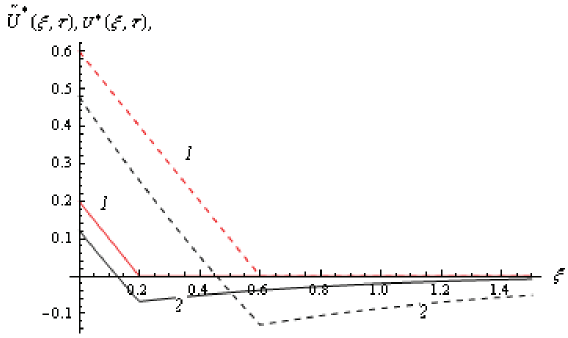

Рис. 4. Кривые *1* – $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$ (решение (26)), кривые *2* – $u^*(\xi,\tau)$ (решение (18), (19), (25)): $m_1^2=1.8$, $A_0=1$; $m_2^2=0.1$. сплошные $\tau=0.2$, пунктирные $\tau=0.6$.

Прежде всего, заметим, что изменение знака $u^*(\xi, \tau)$ означает изменение направления смещения фиксированного сечения. На рис. 1 описаны продольные колебания сечения $\xi = 1$ со временем, рассчитанные по решению (18)–(20), (23). Кривая 1 – классический случай (23): колебания начинаются с задержкой на $\tau = 1$, до этого момента сечение находится в состоянии покоя. Кривые 2, 3 – колебания сечения при наличии в стержне температурного поля: процесс начинается с начального момента времени, смещение одного знака возрастает, и с момента $\tau = 1$ начинаются колебания, амплитуда которых возрастает со временем. Если пренебречь влиянием теплообмена через боковую поверхность стержня, то картина колебаний сохраняется, несколько уменьшается линейная часть графика на промежутке $\tau \in [0,1]$. Рис. 2 раскрывает картину смещения (18)–(20), (23) сечений стержня вдоль его текущей длины в фиксированный момент времени. Для классического случая (23) смещение начинается с торца, и для сечений, численного превышающих фиксированное время, наблюдается состояние покоя. При наличии температурного поля для малых времен смещение также начинается с торца, убывает, меняет знак и затем приближается к нулевому значению – состоянию покоя для достаточно удаленных сечений. При отсутствии теплообмена через боковую поверхность картина поведения смещения практически сохраняется. Рис. 3 описывает поведение смещения (18), (19), (25), (26) фиксированного сечения $\xi = 1$ со временем. В классическом случае (26) также до момента $\tau = 1$ наблюдается состояние покоя, и начиная с $\tau > 1$ смещение возрастает со временем. При наличии градиента температуры в стержне смещение начинается с начального момента времени и до определенного времени не превышает «классического» значения. Рис. 4 описывает смещение сечений стержня вдоль его текущей длины для фиксированных моментов времени. Этот рисунок интересен тем, что картина поведения смещения близка к рис. 2, несмотря на принципиальную разницу в задании граничного условия на торце стержня (15) и (24). Отличие в том, что при $\tau = 0.2$ смещение на рис. 4 начинается с отрицательного значения: температурное поле «опускает» классическую прямую смещения (сплошная линия) в область отрицательных значений. Аналогичное влияние градиента температуры в стержне на смещения наглядно проявляется и на рис. 2.

В заключение заметим, что развитый подход может быть распространен на любые процессы колебаний путем модификации основного уравнения гиперболического типа (1).

Выводы

Рассмотрен новый класс модельных представлений в теории продольных колебаний стержня путем введения в основное уравнение колебании гиперболического типа дополнительного слагаемого, характеризующего наличие в системе градиента температуры. Рассмотрены численные примеры и показано, что в последнем случае картина смещения сечений стержня принципиально меняется по сравнению с классическими решениями в теории колебаний систем в условиях постоянных температур.

Список литературы:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.

3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 653 с.

4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.

References:

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of Mathematical Physics. M.: Nauka Publ., 1966. 724 p. (in Russ.).

2. Aramanovich I.G., Levin V.I. Equations of Mathematical Physics. M.: Nauka Publ., 1969. 288 p. (in Russ.).

3. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical Theory of Thermoconductivity and Applied Thermoelasticity. M.: URSS Publ., 2012. 653 p. (in Russ.).

4. Kartashov E.M. Analytical Methods in the Theory of Thermoconductivity of Solids. M.: Vysshaya Shkola Publ., 2001. 540 p. (in Russ.).