

## ТЕПЛОУДАР ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В.Ломоносова

e-mail: kartashov@mitht.ru

**Р**ассмотрена теория теплового удара для вязкоупругих тел. Сформулированы определяющие соотношения в рамках квазистатической задачи термоупругости. Описана термическая реакция на тепловой удар бесконечной области, ограниченной изнутри сферической поверхностью.

The theory of heat stroke was considered for viscoelastic bodies. Constitutive equations were formulated in the context of the of quasi-static thermoviscoelasticity problem.

**Ключевые слова:** термоупругость, вязкоупругие тела, тепловой удар.

**Key words:** thermoelasticity, viscoelastic body, heat shock.

## Введение

Проблема термического удара – одна из центральных в термомеханике. Её исследования на основе моделей динамической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряжённого состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классических феноменологий Фурье и Максвелла-Каттанео-Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твёрдых телах; развита обобщённая теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учётом тепловой памяти. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в обзорах автора [1, 2] и монографии [3].

Проведённые исследования указанной проблемы выполнены, в основном, для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. В соответствующих математических моделях в терминах динамических, квазистатических или статических задач термоупругости материал считается однородным и изотропным, термомеханические коэффициенты являются постоянными величинами, не зависящими от температуры, и рассматриваемые разности температур не слишком велики, то есть температура не превышает некоторого предельного значения, зависящего от материала, и напряжения не достигают границы текучести. Считается [4], что при относительно низком уровне температур и напряжений поведение широкого класса материалов находится в хорошем соответствии с теорией термоупругости. Остановимся на определяющих соотношениях этой теории.

Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x, y, z)$ , находящаяся в условиях термонапряжённого состояния,  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ,  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  –

внешняя нормаль к  $S$ ,  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ,  $T_0$  – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряжённом состоянии. Пусть  $\sigma_{ij}(M, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ ,  $U_i(M, t)$  ( $i, j = x, y, z$ ) – соответственно, компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости:

уравнения движения

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(M, t)}{\partial j} = \rho \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$M \in D, \quad t > 0,$$

где  $\rho$  – масса единицы объёма ( $i, j = x, y, z$ );

геометрическим уравнениям

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i(M, t)}{\partial j} + \frac{\partial U_j(M, t)}{\partial i} \right], \quad (2)$$

физическим уравнениям (уравнениям закона Гука)

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2G \left[ \varepsilon_{ij}(M, t) + \frac{\nu}{1-2\nu} e(M, t) \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ij} \right] \quad (3)$$

где  $G$  – модуль сдвига, при этом  $2G(1+\nu) = E$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения,  $e(M, t) = \text{div}[U^P(M, t)] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$  – объёмная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\sigma(M, t) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$

$$\text{соотношением} \quad e(M, t) = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} \sigma(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (4)$$

К соотношениям (3)–(4) следует также присоединить граничные условия  $\sum_j \sigma_{ji}(M, t) n_j = f_i(M, t)$ ,  $M \in S$ ,  $t > 0$  на той части поверхности, где заданы напряжения и

$U_i(M, t) = \varphi_i(M, t)$ ,  $M \in S$ ,  $t > 0$  на той части поверхности, где заданы перемещения; для частично ограниченной области следует добавить условие ограниченности в  $\bar{D}$  при  $t \geq 0$  всех функций, входящих в (1)–(3).

При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо выраженное явление вязкого течения. В этом случае поведение реального тела принято называть вязкоупругим, так как тело одновременно проявляет упругие и вязкие свойства. Чтобы математически описать неупругое поведение тела при заданных условиях нагрева и напряжения, необходимо соответствующим образом обобщить соотношения между напряжениями и деформациями (3)–(4). Эти обобщения ведутся по разным направлениям [4], хотя четко разграничить их не всегда возможно. Наиболее общие подходы к проблеме основываются на представлении и методах физики твёрдого тела. Чтобы получить сведения о механических характеристиках материала, рассматривается его микроструктура (кристаллическая, поликристаллическая, аморфная). Другой подход состоит в том, что отвлекаясь от особенностей микроструктуры материала, рассматривать тело как сплошное и искать форму соотношений между напряжениями и деформациями, исходя из общих принципов механики и термодинамики сплошных сред. Наконец, наиболее формальный способ анализа заключается в том, что выбираются некоторые простые формы соотношений между напряжениями и деформациями, описывающие различные типы неупругих явлений, как ползучесть, релаксация напряжений, пластическое течение, упрочнение. Реологические модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения, благодаря достаточной простоте принятых соотношений между напряжениями и деформациями, дают возможность математически проанализировать, как будут вести себя реальные тела в различных условиях нагружения. В этом отношении учёт реологических эффектов имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур.

### Зависимости между напряжениями и деформациями

Так как соотношения между напряжениями и деформациями для вязкоупругих материалов содержат время, то соответствующие математические модели будут нестационарными и, следовательно, динамическими. Однако такие

задачи, за очень немногими исключениями, можно рассматривать как квазистатические, учитывая микросекундные времена действия инерционных эффектов [1–6] и, таким образом, в (1) можно пренебречь влиянием ускорений (уравнения движения заменяются на уравнения равновесия при  $\rho = 0$ ).

Для формулировки реологических законов, связывающих напряжения и деформации, введём девиатор напряжений  $S_{ij}(M, t)$  и девиатор деформаций  $e_{ij}(M, t)$  соотношениями

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad (5)$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  – среднее нормальное напряжение и среднее удлинение

$$\sigma(M, t) = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii}(M, t), \quad (6)$$

$$\varepsilon(M, t) = \frac{1}{3} \sum_i \varepsilon_{ii}(M, t).$$

При помощи этих девиаторов соотношения (3)–(4) можно записать в виде:

$$S_{ij} = 2G e_{ij}, \quad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)} \sigma + \alpha_T (T - T_0). \quad (8)$$

Эти равенства описывают поведение линейно упругой среды. Если к соотношениям закона Гука добавить слагаемое, выражающее ньютонов закон вязкости (последовательное или параллельное соединение пружины и вязкого сопротивления [6]), то полученные зависимости между напряжениями и деформациями будут приводить к среде Максвелла

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \frac{S_{ij}}{\mathcal{G}} = 2G \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \quad (9)$$

и к среде Кельвина (или Фойхта)

$$S_{ij} = 2G \left( e_{ij} + \mathcal{G} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \right). \quad (10)$$

При этом соотношение (8) остаётся без изменения. Последнее означает, что при гидростатическом сжатии или растяжении тело ведёт себя как вполне упругое. Постоянная  $\mathcal{G} = \eta/G$  носит название время релаксации в (9) и время запаздывания в (10),  $\eta$  – вязкость материала. При тепловом ударе (мгновенное нагревание или охлаждение граничной поверхности) напряжения скачкообразно изменяются на величину [3]  $\Delta = |E \alpha_T (T_c - T_0)|$ , где  $T_c = T(M, t)$ ,

$M \in S$ ,  $t > 0$ . В упругой среде эти напряжения остаются неизменными, а в среде Максвелла начинается вязкое течение, вследствие которого напряжение непрерывно убывает, асимптотически приближаясь к нулевому значению. В среде Кельвина, напротив, скачок напряжения превышает соответствующее упругое значение, к которому это напряжение впоследствии асимптотически приближается (рис. 1). Разу-

меется, поведение материалов на практике сложнее случаев (9)–(10), однако, если основываться на применении простейших моделей, то для металлов при высоких температурах и для полимеров, сочетающих

процессы упругого деформирования и вязкого течения, можно использовать схему Максвелла, а для материалов с внутренним трением при изучении затухающих колебаний – схему Кельвина.

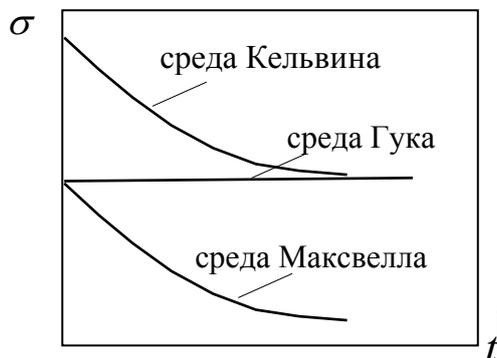


Рис. 1. Особенности поведения упругой и вязкоупругой среды при тепловом ударе.

Для упрощения дальнейших рассуждений введём следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{at}{R^2}; \quad \mathcal{G}^* = \frac{a\mathcal{G}}{R^2}; \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\alpha_T(T_c - T_0)}; \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\alpha_T(T_c - T_0)}; \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon_{ij}}{\alpha_T(T_c - T_0)} \\ \sigma^* &= \frac{\sigma}{\alpha_T(T_c - T_0)}; \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\alpha_T(T_c - T_0)}; \quad W = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}, \quad U_i = \frac{U_i}{R\alpha_T(T_c - T_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $a$  – температуропроводность материала,  $R$  – масштабная единица. Соотношения (7)–(10) записываются в виде:

$$S_{ij}^* = 2G e_{ij}^*, \quad \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)} \sigma^* = \varepsilon^* - W, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S_{ij}^*}{\partial \tau} + \frac{S_{ij}^*}{\mathcal{G}^*} = 2G \frac{\partial e_{ij}^*}{\partial \tau}, \quad S_{ij}^* = 2G \left( e_{ij}^* + \mathcal{G}^* \frac{\partial e_{ij}^*}{\partial \tau} \right). \quad (13)$$

Наиболее общие линейные зависимости между напряжениями и деформациями для вязкоупругих (механически и термически изотропных) тел могут быть представлены в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} P_1(D) S_{ij}^* &= Q_1(D) e_{ij}^*, \\ P_2(D) \sigma^* &= Q_2(D) (\varepsilon^* - W^*) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $P_i(D)$ ,  $Q_i(D)$  ( $i = 1, 2$ ) – полиномы относительно оператора  $D = \partial/\partial \tau$

$$\left. \begin{aligned} P_1(D) &= \sum_{n=0}^p p_n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}, \quad Q_1(D) = \sum_{n=0}^q q_n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}, \\ P_2(D) &= \sum_{n=0}^f f_n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}, \quad Q_2(D) = \sum_{n=0}^h h_n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Коэффициенты  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $f_n$ ,  $h_n$  – постоянные материала (в наиболее общем случае они могут быть функциями координат и времени). Так для среды Максвелла (12)

$$\left. \begin{aligned} P_1(D) &= 1/\mathcal{G}^* + \partial/\partial \tau, \quad Q_1(D) = 2G \partial/\partial \tau, \\ P_2(D) &= \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)}, \quad Q_2(D) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для среды Кельвина

$$\left. \begin{aligned} P_1(D) &= 1, \quad Q_1(D) = 2G(1 + \mathcal{G}^* \partial / \partial \tau) \\ P_2(D) &= \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)}, \quad Q_2(D) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

**Упруго-вязкоупругая аналогия**

Алфрей и Ли показали, что анализ поведения вязкоупругих тел может быть сведён к рассмотрению некоторых эквивалентных упругих задач. Хилтон и Штернберг (ссылки в [6]) обобщили аналогию Алфрея – Ли на случай температурных напряжений и показали, что каждая решённая квазистатическая задача термоупругости сразу же даёт соответствующее вязкоупругое решение. В предлагаемой ниже теории все коэффициенты полиномов (14) принимаются постоянными, напряжение и температура в начальный момент равны нулю, как и их производные по времени до достаточно высокого порядка. В пространстве изображений по Лапласу  $\bar{\sigma}_{ij}^*(M, s) = \int_0^\infty \sigma_{ij}^*(M, \tau) \exp(-s\tau) d\tau$  (напряжения  $\sigma_{ij}^*$  и других функций) основные соотношения (1)

(при  $\rho = 0$ ), (2) (с учётом (11) – (12)) записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^*}{\partial j} &= 0, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = (1/2)(U_{i,j}^* + U_{j,i}^*) \\ \bar{S}_{ij} &= \frac{\bar{Q}_1(s)}{P_1(s)} \bar{e}_{ij}, \quad \bar{\sigma}^* = \frac{\bar{Q}_2(s)}{P_2(s)} (\bar{\varepsilon}^* - \bar{W}). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\Sigma_j \bar{\sigma}_{ij}^* n_j = \bar{f}_i^*, \quad \bar{U}_i(M, s) = \bar{\varphi}_i(M, s), \quad M \in S. \quad (19)$$

Уравнения (18)–(19) совпадают с уравнениями линейно упругого тела той же формы, если считать, что модуль сдвига и коэффициент Пуассона в изображении по Лапласу принимает значения

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}(s) &= \frac{1}{2} \frac{\bar{Q}_1(s)}{P_1(s)}, \quad \bar{\nu}(s) = \frac{\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{2(\bar{K}(s) + \bar{G}(s))}, \\ \bar{K}(s) &= \frac{\bar{Q}_2(s)}{P_2(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таким образом, исходная задача о температурных напряжениях вязкоупругого тела оказалась сведённой к эквивалентной задаче термоупругости. Решив эту задачу в пространстве изображений и заменив величины  $G$  и  $\nu$  на их изображения (20), после выполнения обратного преобразования найдем решение задачи для термовязкоупругого тела. Для этого необходимо предварительно вычислить все величины в (20). Согласно (16) (17) находим:

для среды Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_1(s) &= 1/\mathcal{G}^* + s, \quad \bar{Q}_1(s) = 2Gs, \\ \bar{P}_2(s) &= \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)}, \quad \bar{Q}_2(s) = 1; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

для среды Кельвина

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_1(s) &= 1, \quad \bar{Q}_1(s) = 2G(1 + \mathcal{G}^* s), \\ \bar{P}_2(s) &= \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)}, \quad \bar{Q}_2(s) = 1; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Теперь из (20) находим:

для среды Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \frac{1 + \nu + 3\nu \mathcal{G}^* s}{2(1 + \nu) + 3\mathcal{G}^* s} = \nu \frac{s + 1/\mathcal{G}_2^*}{s + 2\nu/\mathcal{G}_2^*}, \\ \bar{G}(s) &= G \frac{s}{s + 1/\mathcal{G}^*}, \quad \frac{1 + \bar{\nu}(s)}{1 - \bar{\nu}(s)} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{s + 1/\mathcal{G}^*}{s + 1/\mathcal{G}_1^*}, \\ \mathcal{G}_1^* &= \frac{3(1 - \nu)}{1 + \nu} \mathcal{G}^*, \quad \mathcal{G}_2^* = \frac{3\nu}{1 + \nu} \mathcal{G}^*; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

для среды Кельвина

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \frac{3\nu - (1-2\nu)\mathcal{G}^* s}{3 + (1-2\nu)\mathcal{G}^* s}, \quad \bar{G}(s) = G(1 + \mathcal{G}^* s), \\ \frac{1 + \bar{\nu}(s)}{1 - \bar{\nu}(s)} &= \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{1 + s\mathcal{G}_1^*}, \quad \mathcal{G}_1^* = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \mathcal{G}^*. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

### Термическая реакция вязкоупругого пространства, ограниченного изнутри сферической поверхностью

Рассмотрим бесконечную среду с начальной температурой  $T_0$ , содержащую сферическую полость радиуса  $R$ . Тепловой удар создается тем, что в момент  $t = 0$  поверхность этой полости мгновенно принимает температуру  $T_c$  и далее поддерживается при этой температуре. В сферической системе координат  $(r, \varphi, \theta)$  в условиях центральной симметрии температурная функция  $T = T(r, t)$ , напряжения  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r, t)$ , деформация  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(r, t)$  ( $i, j = r, \varphi, \theta$ ). При этом  $\sigma_{ij} = 0$ ,  $\varepsilon_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ , перемещения  $U_\varphi = U_\theta = 0$ ,  $U_r = U_r(r, t)$ . В случае нагрева сферической поверхности  $T_0 < T_c$ ,  $T_0 < T(r, t) < T_c$ ; в случае охлаждения  $T_c < T_0$ ,  $T_c < T(r, t) < T_0$ . Требуется описать термическую реакцию рассматриваемой области в вязкоупругом состоянии, предполагая сферическую поверхность свободной от напряжений. Задачу запишем в перемещениях [3] в координатах  $(\rho, \tau)$ , где

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad W(\rho, \tau) = \frac{T(r, t) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{T_0 - T(r, t)}{T_0 - T_c}; \\ U_\rho(\rho, \tau) &= \frac{U_r(r, t)}{R\alpha_T(T_c - T_0)}; \quad \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{\alpha_T(T_c - T_0)}; \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) &= \sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)}{\alpha_T(T_c - T_0)} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, t)}{\alpha_T(T_c - T_0)}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} - \frac{2U_\rho}{\rho^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad \rho > 1, \quad \tau > 0 \quad (25)$$

$$U_\rho \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial U_\rho}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \rho \geq 1, \quad (26)$$

$$\left( \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \frac{2\nu}{1-\nu} U_\rho \right)_{\rho=1} = \frac{1+\nu}{1-\nu} W \Big|_{\rho=1}, \quad \tau > 0, \quad (27)$$

$$|U_\rho(\rho, \tau)| < \infty, \quad \rho \geq 1, \quad \tau \geq 0; \quad (28)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, \quad \tau > 0, \quad (29)$$

$$W \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \rho \geq 1, \quad (30)$$

$$W \Big|_{\rho=1} = 1, \quad \tau > 0, \quad (31)$$

$$|W(\rho, \tau)| < +\infty, \quad \rho \geq 1, \quad \tau \geq 0. \quad (32)$$

При этом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) &= \\ &= \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu) \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + 2\nu \frac{U_\rho}{\rho} - (1+\nu)W \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) &= \sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \\ &= \frac{2G}{1-2\nu} \left[ \frac{U_\rho}{\rho} + \nu \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} - (1+\nu)W \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Опуская длительные выкладки, запишем операционное решение задачи (25) – (34) в пространстве изображений по Лапласу  $\int_0^{\infty} K \exp(-s\tau) d\tau$ .

Находим последовательно:

$$\bar{W}(\rho, s) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{s} \exp[-(\rho-1)\sqrt{s}]; \quad (35)$$

$$\bar{U}_{\rho}(\rho, s) = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\rho^2} \bar{F}(\rho, s); \quad (36)$$

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, s) = -4G \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\rho^3} \bar{F}(\rho, s); \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho, s) &= \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\rho, s) = \\ &= 2G \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left[ \frac{1}{\rho^3} \bar{F}(\rho, s) - \bar{W}(\rho, s) \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\bar{F}(\rho, s) = \int_1^{\rho} x^2 \bar{W}(x, s) dx. \quad (39)$$

Переходя в пространство оригиналов, запишем решение термоупругой задачи:

$$\left. \begin{aligned} W(\rho, \tau) &= \frac{1}{\rho} \Phi^* \left( \frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}} \right); \quad U_{\rho}(\rho, \tau) = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\rho^2} F(\rho, \tau); \\ \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) &= -\frac{4G(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\rho^3} F(\rho, \tau); \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) = \sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \\ &= \frac{2G(1+\nu)}{(1-\nu)} \left[ \frac{1}{\rho^3} F(\rho, \tau) - W(\rho, \tau) \right], \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} F(\rho, \tau) &= \int_1^{\rho} x^2 \bar{W}(x, \tau) dx = \\ &= \frac{1}{2} (\rho^2 - 2\tau - 1) \Phi^* \left( \frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}} \right) - \\ &- (\rho+1) \sqrt{\tau/\pi} \exp \left[ -\frac{(\rho-1)^2}{4\tau} \right] + \\ &= \tau + 2\sqrt{\tau/\pi}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ,  $\Phi(z) = \left( 2/\sqrt{\pi} \right) \int_0^z \exp(-y^2) dy$  – функция Лапласа.

Рассматривая зависимость решения от времени  $\tau$  (при фиксированном  $\rho$ ) замечаем, что при режиме нагревания ( $T_c - T_0 > 0$ )  $W$ ,  $U_{\rho}$  и  $(-\sigma_{\rho\rho})$  являются монотонно возрастающими функциями  $\tau$ ;  $\sigma_{\varphi\varphi}$  возрастает, достигает положительного максимума и далее стремится к отрицательному стационарному значению  $\sigma_{\varphi\varphi}(1-\nu) = -(\rho^2 + 1)/(2\rho^3)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . На поверхности сферы  $\rho = 1$  имеем:  $\sigma_{\varphi\varphi}(1-\nu) = \sigma_{\theta\theta}(1-\nu) = -1$  при нагревании и  $\sigma_{\varphi\varphi}(1-\nu) = \sigma_{\theta\theta}(1-\nu) = +1$  при охлаждении ( $T_c - T_0 < 0$ ), причём эти значения окружных напряжений имеют место не только при  $\tau \rightarrow \infty$ , но и в продолжение всего процесса нагрева или охлаждения (при  $\tau \geq 0$ ).

Переходя к вязкоупругой области, необходимо в изображениях (36)–(38) заменить  $\nu$  и  $G$  на их изображения  $\bar{\nu}(s)$  и  $\bar{G}(s)$ , то есть записать:

$$\bar{U}_{\rho}(\rho, s) = \frac{1+\bar{\nu}(s)}{1-\bar{\nu}(s)} \frac{1}{\rho^2} \bar{F}(\rho, s); \quad (42)$$

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, s) = -4 \frac{1 + \bar{\nu}(s)}{1 - \bar{\nu}(s)} \bar{G}(s) \frac{1}{\rho^3} \bar{F}(\rho, s); \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho, s) &= \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\rho, s) = \\ &= 2 \frac{1 + \bar{\nu}(s)}{1 - \bar{\nu}(s)} \bar{G}(s) \left[ \frac{1}{\rho^3} \bar{F}(\rho, s) - \bar{W}(\rho, s) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Далее в (42)–(44) с помощью соотношений (23)–(24) переходим к оригиналам по формулам операционного исчисления. Опуская длительные выкладки, окончательно находим:

среда Максвелла

$$U_{\rho}(\rho, \tau) = \frac{1}{\rho^2} \left[ 3F(\rho, \tau) - \frac{2(1-2\nu)}{(1-\nu)} \psi_1(\rho, \tau) \right] \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)(1-\nu)}{-4G(1+\nu)} &= \frac{1}{\rho^3} \psi_1(\rho, \tau), \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) = \\ &= \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho, \tau) = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau)(1-\nu)}{2G(1+\nu)} = \end{aligned} \quad (46)$$

$$= \frac{\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau)(1-\nu)}{2G(1+\nu)} = \frac{1}{\rho^3} \psi_1(\rho, \tau) - \psi_2(\rho, \tau);$$

среда Кельвина

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{\rho}(\rho, \tau)(1-\nu)}{(1+\nu)} &= \frac{1}{\rho^2} [F(\rho, \tau) - \psi_1(\rho, \tau)], \\ \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)(1-\nu)}{-4G(1+\nu)} &= \frac{1}{\rho^3} \left[ F(\rho, \tau) + \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} \psi_1(\rho, \tau) \right], \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) = \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho, \tau) &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau)(1-\nu)}{2G(1+\nu)} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(\rho, \tau)(1-\nu)}{2G(1+\nu)} = \\ &= \frac{1}{\rho^3} F(\rho, \tau) - W(\rho, \tau) + \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} \left[ \frac{1}{\rho^3} \psi_1(\rho, \tau) - \psi_2(\rho, \tau) \right], \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где  $F(\rho, \tau)$  – функция (41),

$$\begin{aligned} \psi_1(\rho, \tau) &= \int_0^{\tau} \exp[-(\tau - \tau')/\mathcal{G}_1^*] \frac{\partial F(\rho, \tau')}{\partial \tau'} d\tau' = \frac{1}{\rho^3} \left\{ \omega [1 - \exp(-\omega\tau)] + \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp[-(\tau - \tau')\omega] d\tau' - \int_0^{\tau} \exp[-(\tau - \tau')\omega] \Phi^* \left( \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\tau'}} \right) d\tau' - \\ &\left. - \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left[-\frac{(\rho - 1)^2}{4\tau'} - (\tau - \tau')\omega\right] d\tau' \right\}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\rho, \tau) &= \int_0^{\tau} \exp[-(\tau - \tau')/\mathcal{G}_1^*] \frac{\partial W(\rho, \tau')}{\partial \tau'} d\tau' = \\ &= \frac{(\rho - 1)}{2\rho\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{(\tau - \tau')^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\rho - 1)^2}{4(\tau - \tau')} - \omega\tau'\right] d\tau'. \end{aligned} \quad (49)$$

В (48) – (49)  $\omega$  – безразмерная постоянная

$$\omega = 1/\mathcal{G}_1^* = \begin{cases} \frac{(1+\nu) R^2}{3(1-\nu) a \mathcal{G}} & \text{для среды Максвелла,} \\ \frac{3(1-\nu) R^2}{2(1-2\nu) a \mathcal{G}} & \text{для среды Кельвина.} \end{cases} \quad (50)$$

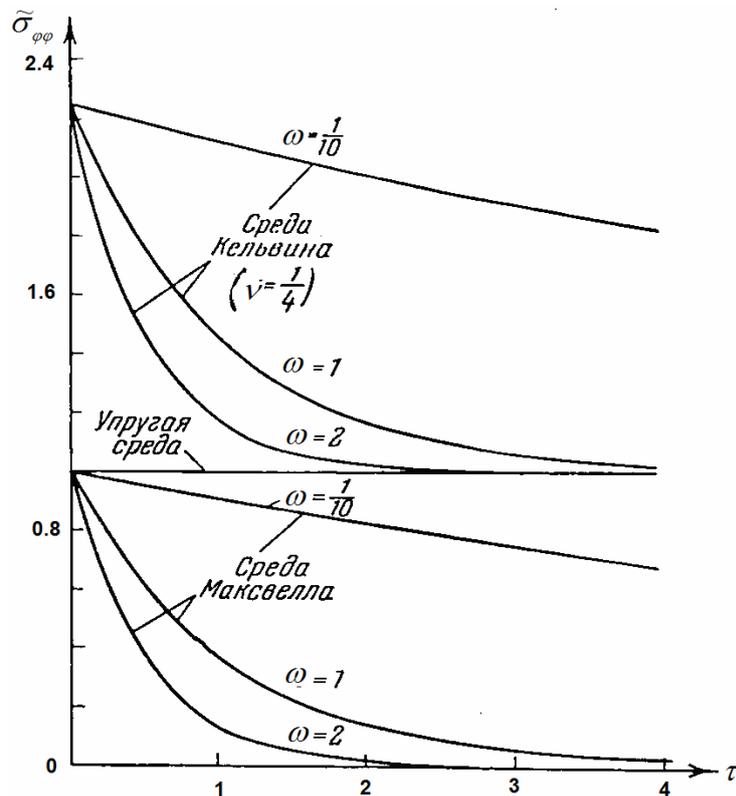


Рис. 2. Поведение окружного напряжения на поверхности сферы.

Некоторые результаты вычислений представлены на рис. 2, где приведена зависимость окружного безразмерного напряжения  $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho, \tau)$  от безразмерного времени  $\tau$  на поверхности полости  $\rho=1$  в условиях охлаждения (в (46) и (47) справа знаки меняются на противоположные, так как слева  $(T_c - T_0) < 0$ ). Рис. 2 в соответствии с графиками на рис. 1 наглядно показывает особенности термической реакции в вязкоупругой области на тепловой удар по сравнению с упругой областью, изученные в рамках квазистатической задачи термовязкоупругости.

### Заключение

Исследование проблемы теплового удара для вязкоупругих сред принадлежит к числу достаточно трудных вопросов термомеханики. Одним из выходов из этой ситуации является переход от динамических задач к квазистатическим. В этом случае появляется возможность исследовать проблему аналитически до конца. Что касается учёта инерционных эффектов, то эти случаи в литературе практически не рассмотрены и автор предполагает изучить эту проблему в последующих публикациях.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений. – М.: ВИНТИ, 1988. Т. 25. С. 3–88.
2. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. – Самара: Изд-во СГТУ, 2010. 970 с.
4. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. 517 с.
5. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
6. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Изд-во физмат. лит-ры, 1963. 251 с.