УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ ТРЕЩИНЫ

В.В. Шевелев, профессор, Р.А. Осипов, аспирант

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: r.a.osipov@gmail.com

Предложена аналитическая модель сил сцепления между берегами круговой дискообразной трещины хрупкого разрушения, величина которых определяется расстоянием между ними.

An analytical model of adhesion forces between the sides of a circular disk-shaped brittle failure crack has been proposed, the adhesion forces being determined by the distance between their sides.

Ключевые слова: *трещина, математическая модель, хрупкое разрушение, интегральное уравнение, силы сцепления.*

Key words: *crack, mathematical model, brittle failure, integral equation, adhesion forces.*

Одной из серьезных проблем математической теории трещин является неограниченный рост напряжений при неограниченном приближении к вершине трещины. Этот эффект является следствием модели трещины как разреза нулевой толщины, между сторонами которого не действуют какие либо силы, а за его пределами, в плоскости разреза, смещения равны нулю. В то же время напряжение в вершине трещины $\sigma^* \; l,\sigma$ определяет частоты разрыва связей $\omega^+ \; l$ в вершине трещины длины l при внешнем растягивающем напряжении σ и с физической точки зрения должно быть конечным. В современных моделях процесса разрушения указанное напряжение находится с помощью искусственного «обрезания» неограниченно растущих при приближении к вершине трещины напряжений, полагая его равным напряжению на некотором расстоянии λ от вершины трещины. В качестве величины λ обычно выбирают среднее межмолекулярное расстояние, характерное для данного материала [1].

Таким образом, в рамках указанной классической модели трещины хрупкого разрушения не представляется возможным, на наш взгляд, сформулировать последовательные, физически корректные кинетические модели хрупкого и квазихрупкого разрушения материалов, основанные на структурно-вероятностном подходе к исследованию процесса разрушения [1].

В связи с этим актуальной проблемой физики прочности и долговечности материалов является формулировка математических моделей трещины разрушения, приводящих к конечному напряжению в вершине трещины. В качестве одной из таких альтернативных моделей нам представляется модель трещины, предложенная Баренблаттом Г.И., в которой предполагается наличие сил сцепления между берегами трещины [2].

Однако введение сил сцепления существенно усложняет расчет напряженно-деформированного состояния материала, содержащего трещину. Это связано, прежде всего, с тем, что силы сцепления между берегами трещины определяются потенциалом взаимодействия между структурными единицами (атомами, молекулами), расположенными на берегах трещины. Этот потенциал (например, Морзе или Леннарда-Джонса и т. д.) зависит нелинейным образом от расстояния между структурными единицами, то есть от расстояния между берегами трещины.

В результате, согласованное с силами сцепления расстояние между берегами трещины устанавливается на значении, соответствующем механическому равновесию всей системы, а определение напряженно-деформированного состояния материала с трещиной разрушения с учетом сил сцепления в рамках классической теории упругости приводит к необходимости решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения, определяющего расстояние между берегами трещины.

В силу нелинейности и сингулярности интегрального уравнения его решение возможно только численными методами, хотя Баренблаттом и был получен асимптотический профиль внутренней прямолинейной трещины вблизи ее конца, но без учета в явном виде зависимости сил сцепления от расстояния между ее берегами. Математическая модель трещины разрушения с учетом в явном виде зависимости сил сцепления от расстояния между ее берегами, так и численный метод ее решения рассматривались авторами ранее в работе [3], в которой была предложена математическая модель трещины хрупкого разрушения в виде круговой дискообразной трещины. В рамках этой модели была учтена зависимость сил сцепления между ее берегами от расстояния между ними, а также был разработан алгоритм численного решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения, определяющего в рамках модели профиль трещины.

Однако численное решение делает анализ полученного решения достаточно громоздким из-за большого числа физических параметров в модели и, следовательно, затрудняет выявление закономерностей развития трещины разрушения в материале и получение необходимых для теории асимптотических выражений. В то же время, результаты численного расчета силы сцепления между берегами трещины, полученные в работе [3], показали, что эта сила имеет доминирующий максимум в вершине трещины и резко убывает при небольшом удалении от нее. Это позволяет в качестве нулевого приближения рассмотреть распределение силы сцепления в виде ступеньки в вершине трещины, что, как будет показано далее, дает возможность получить аналитические выражения для профиля трещины, силы сцепления в первом приближении и далее для энергетических характеристик, определяющих ее устойчивость. Рассмотрение такой модели составляет цель данной работы.

Рассмотрим неограниченное тело, внутри которого имеется круговая дискообразная трещина радиуса R, которая лежит в плоскости Oxy, являющейся также плоскостью симметрии трещины (центр трещины совпадает с началом координат). К телу приложено внешнее, нормальное к данной плоскости, постоянное растягивающее напряжение σ. Трещины с такой ориентацией относительно приложенной внешней растягивающей нагрузки являются наиболее опасными для материала, так как растягивающие напряжения у фронта такой трещины являются наибольшими среди аналогичных трещин, но с другой ориентацией. Если мысленно рассечь материал по плоскости, в которой лежит рассматриваемая трещина, то мы получим задачу о равновесии упругой среды, ограниченной плоскостью, на поверхности которой действуют силы. В данном случае они представляют собой силы сцепления, которые в полном соответствии с линейной теорией упругости должны задаваться на недеформированной поверхности как внешние силы. Задачи такого типа могут быть решены методом интегральных преобразований. Однако, так как целью работы является нахождение профиля трещины с учетом сил сцепления, а не решение соответствующей задачи теории упругости, то мы воспользуемся решением этой задачи, приведенным в [4] в терминах тензора Грина для уравнений равновесия полубесконечной среды, для случая, когда приложенные к свободной поверхности силы исчезают на бесконечности. Для этого необходимо считать, что к свободной поверхности приложена сила, равная разности между силой сцепления на единицу площади поверхности и приложенным внешним растягивающим напряжением. В результате приходим к следующему интегральному уравнению для определения смещения берегов трещины:

$$u_z(x,y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint_{E^2}\frac{F(x_1,y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}dx_1dy_1. \qquad (1)$$

Здесь $u_z(x,y) = h(x,y) - h_0(x,y) - h_\infty + h_\infty^0$ есть разность между смещением берега трещины в точке (x,y) вдоль оси Oz и смещением в плоскости трещины при тех же условиях нагружения, но в отсутствие трещины; $h(x,y)$ – половина расстояния между берегами трещины или расстояние от берега трещины до плоскости симметрии Oxy, то есть профиль трещины; $h_0(x,y)$ – начальный, то есть до нагружения, профиль трещины; h_∞^0, h_∞ – половина равновесного межчастичного расстояния в ненагруженном материале и в материале, подвергнутом одноосному растяжению напряжением σ, соответственно; ν – коэффициент Пуассона материала; E – модуль Юнга материала; $F(x,y) = f(h(x,y)) = \frac{1}{2r_0^2}\frac{dU(h)}{dh} - \sigma$, где $U(h)$ – потенциал межатомного взаимодействия между берегами трещины; $r_0 = 2h_\infty^0$ – равновесное межчастичное расстояние в ненагруженном материале; r_0^2 – площадь поверхности трещины, приходящаяся на одну кинетическую единицу (атом, молекулу). Величина h_∞ определяется как решение уравнения $\frac{1}{2r_0^2}\frac{dU(h)}{dh} - \sigma = 0$.

В силу радиальной симметрии задачи после интегрирования в уравнении (1) в полярных координатах по углу φ получим следующее уравнение для определения величины $u_z(r)$ как функции расстояния $r = \sqrt{x^2+y^2}$ от центра трещины

$$u_z(r) = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E}\int_0^\infty \frac{r_1}{r-r_1} f(h(r_1))\,\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{rr_1}}{|r-r_1|}\right)dr_1. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{K}(z)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода, определяемый соотношением:

$$\mathbf{K}(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-z\sin^2 t}}dt, \quad \arg(1-z) < \pi.$$

Можно показать, что для ядра интегрального уравнения (2) справедливо соотношение:

$$\frac{r_1}{r-r_1}\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{rr_1}}{|r-r_1|}\right) = \begin{cases}\mathbf{K}\left(\dfrac{r^2}{r_1^2}\right), & r < r_1\\[2ex] \dfrac{r_1}{r}\mathbf{K}\left(\dfrac{r_1^2}{r^2}\right), & r \ge r_1\end{cases}. \qquad (3)$$

Предположим, что сила $f(h(r)) = f(r)$ имеет вид:

$$f(r)=\begin{cases} f_1(r), & r\le\alpha\\ f_2(r), & \alpha<r\le\beta\\ 0, & r>\beta\end{cases} \tag{4}$$

Тогда, соотношение (2) может быть представлено в виде:

$$u_z(r)=4\frac{1-\nu^2}{\pi E}\begin{cases}\frac{1}{r}\int\limits_0^r f_1(r_1)r_1\mathbf{K}\left(\frac{r_1^2}{r^2}\right)dr_1+\int\limits_r^\alpha f_1(r_1)\mathbf{K}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)dr_1+\int\limits_\alpha^\beta f_2(r_1)\mathbf{K}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)dr_1, & r<\alpha\\ \frac{1}{r}\int\limits_0^\alpha f_1(r_1)r_1\mathbf{K}\left(\frac{r_1^2}{r^2}\right)dr_1+\frac{1}{r}\int\limits_\alpha^r f_2(r_1)r_1\mathbf{K}\left(\frac{r_1^2}{r^2}\right)dr_1+\int\limits_r^\beta f_2(r_1)\mathbf{K}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)dr_1, & \alpha\le r<\beta\\ \frac{1}{r}\int\limits_0^\alpha f_1(r_1)r_1\mathbf{K}\left(\frac{r_1^2}{r^2}\right)dr_1+\frac{1}{r}\int\limits_\alpha^\beta f_2(r_1)r_1\mathbf{K}\left(\frac{r_1^2}{r^2}\right)dr_1, & r\ge\beta\end{cases}$$

Или, если ввести функции:

$$\Psi_1(r;\ i;\ a,b)=\int\limits_a^b f_i(r_1)r_1\mathbf{K}\left(\frac{r_1^2}{r^2}\right)dr_1,\quad \Psi_2(r;\ i;\ a,b)=\int\limits_a^b f_i(r_1)\mathbf{K}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)dr_1, \tag{5}$$

в виде:

$$u_z(r)=4\frac{1-\nu^2}{\pi E}\frac{1}{r}\begin{cases}\Psi_1(r;\ 1;\ 0,r)+r\Psi_2(r;\ 1;\ r,\alpha)+r\Psi_2(r;\ 2;\ \alpha,\beta), & r<\alpha\\ \Psi_1(r;\ 1;\ 0,\alpha)+\Psi_1(r;\ 2;\ \alpha,r)+r\Psi_2(r;\ 2;\ r,\beta), & \alpha\le r<\beta\\ \Psi_1(r;\ 1;\ 0,\alpha)+\Psi_1(r;\ 2;\ \alpha,\beta), & r\ge\beta\end{cases} \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) позволяют найти выражение для смещения $u_z(r)$ для любой силы $f(r)$, имеющей вид (4).

Предположим, что сила $f(r)$ имеет самый простой вид — «ступеньки»:

$$f(r)=\begin{cases} f_0, & r\le R-\delta_1\\ f_m, & R-\delta_1<r\le R+\delta_2\\ 0, & r>R+\delta_2\end{cases} \tag{7}$$

Здесь f_m – максимальное значение силы сцепления.

Выражение (7) содержит в себе три неизвестных величины f_0,δ_1,δ_2 которые будут определены из предположения о самосогласованном учете сил сцепления, которые действуют между берегами трещины.

Тогда можно показать, что справедливы следующие соотношения для функций (5) (также приведены значения этих функций при некоторых специальных значениях параметра, полученные предельным переходом):

$$\Psi_1(r;\ 1;\ a,b)=f_0\left((r^2-a^2)\mathbf{K}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)-r^2\mathbf{E}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)+\right. \tag{8.1}$$

$$\left.+(b-r)(b+r)\mathbf{K}\left(\frac{b^2}{r^2}\right)+r^2\mathbf{E}\left(\frac{b^2}{r^2}\right)\right);$$

$$\Psi_1(r;\ 2;\ a,b)=f_m\left((r^2-a^2)\mathbf{K}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)-r^2\mathbf{E}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)+\right. \tag{8.2}$$

$$\left.+(b-r)(b+r)\mathbf{K}\left(\frac{b^2}{r^2}\right)+r^2\mathbf{E}\left(\frac{b^2}{r^2}\right)\right);$$

$$\Psi_1(r;\ 1;\ 0,r)=f_0r^2;\quad \Psi_1(r;\ 2;\ \alpha,r)=f_mr^2; \tag{8.3}$$

$$\Psi_2(r;\ 1;\ a,b)=f_0\left(b\mathbf{E}\left(\frac{r^2}{b^2}\right)-a\mathbf{E}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right); \tag{8.4}$$

$$\Psi_2(r;\ 2;\ a,b)=f_m\left(b\mathbf{E}\left(\frac{r^2}{b^2}\right)-a\mathbf{E}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right), \tag{8.5}$$

в которых функция $\mathbf{E}(z)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода, определяемый соотношением:

$$\mathbf{E}(z)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-z\sin^2 t}\,dt,\quad \arg(1-z)<\pi .$$

Таким образом, смещение $u_z(r)$ в случае, если сила $f(r)$ имеет вид (7), с учетом (6) и (8.1) – (8.5) имеет вид:

$$u_z(r)=\frac{4(1-\nu^2)}{r\,\pi E}\begin{cases} r\left((f_0-f_m)(R-\delta_1)\,\mathbf{E}\left(\dfrac{r^2}{(R-\delta_1)^2}\right)+f_m(R+\delta_2)\,\mathbf{E}\left(\dfrac{r^2}{(R+\delta_2)^2}\right)\right), & r<R-\delta_1,\\[2ex] \left\{\begin{array}{l}(f_0-f_m)\left(\left((R-\delta_1)^2-r^2\right)\mathbf{K}\left(\dfrac{(R-\delta_1)^2}{r^2}\right)+r^2\mathbf{E}\left(\dfrac{(R-\delta_1)^2}{r^2}\right)\right)+\\ +f_m r(R+\delta_2)\,\mathbf{E}\left(\dfrac{r^2}{(R+\delta_2)^2}\right)\end{array}\right\}, & R-\delta_1\le r<R+\delta_2,\\[2ex] \left\{\begin{array}{l}(f_m-f_0)\left\{\left(r^2-(R-\delta_1)^2\right)\mathbf{K}\left(\dfrac{(R-\delta_1)^2}{r^2}\right)-r^2\mathbf{E}\left(\dfrac{(R-\delta_1)^2}{r^2}\right)\right\}+\\ +f_m\left\{r^2\mathbf{E}\left(\dfrac{(R+\delta_2)^2}{r^2}\right)-\left(r^2-(R+\delta_2)^2\right)\mathbf{K}\left(\dfrac{(R+\delta_2)^2}{r^2}\right)\right\}\end{array}\right\}, & r\ge R+\delta_2.\end{cases} \tag{9}$$

Численное решение, найденное авторами в [3], показывает, что для профиля силы $u_z(r)$ при $r\to+\infty$ справедливо соотношение

$$u_z(r)=O\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{10}$$

Разложим выражение (9) в ряд Тейлора при $r\to+\infty$ до члена порядка $O\left(\frac{1}{r^5}\right)$. В результате получим:

$$u_z(r)\underset{r\to+\infty}{=}\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\pi(\delta_1+\delta_2)(\delta_2-\delta_1+2R)(f_m+f_0)(R-\delta_1)^2}{4r}+\\ +\dfrac{\pi(\delta_1+\delta_2)(\delta_2-\delta_1+2R)\left(\delta_1^2+\delta_2^2+2R^2+2(\delta_2-\delta_1)R\right)(f_m+f_0)(R-\delta_1)^4}{32r^3}+O\left(\dfrac{1}{r^5}\right)\end{array}\right\}. \tag{11}$$

Из (10) следует, что коэффициент при $\frac{1}{r}$ в выражении (11) обязан быть равен нулю, отсюда получаем, что должно выполняться условие:

$$(\delta_1+\delta_2)(\delta_2-\delta_1+2R)(f_m+f_0)(R-\delta_1)^2=0. \tag{12}$$

Выражение нормальной силы $f(h)$ (в зависимости от профиля трещины h), учитывающей силы сцепления между берегами трещины в случае нагружения материала растягивающим напряжением σ, можно записать, применяя теорию потенциала Морзе в следующем виде:

$$f(h)=\frac{4\alpha D}{r_0^2}\left(e^{-2\alpha(h-h_\infty^0)}-e^{-4\alpha(h-h_\infty^0)}\right)-\sigma. \tag{13}$$

Начальный профиль трещины (до нагружения), имеет вид:

$$h_0(r)=\begin{cases}(h_0-h_m)\left(1-\dfrac{r}{R}\right)+h_m, & r<R;\\ h_\infty^0, & r>R.\end{cases} \tag{14}$$

где $h_\infty^0=\frac{r_0}{2}$, $h_m=\frac{r_0}{2}+\frac{\ln 2}{2\alpha}$.

Разложим выражение (9) в ряд Тейлора при $r\to 0$ до члена порядка $O(r^4)$, получим:

$$u_z(r)\underset{r\to0+}{=}\frac{2(1-\nu^2)}{E}\left\{(\delta_1+\delta_2)(f_m+f_0)(R-\delta_1)+\frac{r^2(\delta_1+\delta_2)(f_m-f_0)(R+\delta_2)}{4(R-\delta_1)(R+\delta_2)}+O(r^4)\right\}. \tag{15}$$

Ввиду того, что функция (13) с учетом смещения профиля трещины имеет вид:

$$f(r)=\frac{4\alpha D}{r_0^2}\left(e^{-2\alpha(h_0(r)+u_z(r)+h_\infty-h_\infty^0)}-e^{-4\alpha(h_0(r)+u_z(r)+h_\infty-h_\infty^0)}\right)-\sigma,$$

(где $h_\infty(0)=\frac{r_0}{2}$), получаем уравнение:

$$f(0)=f_0, \tag{16}$$

которое может быть переписано, с учетом (14) и (15), в виде:

$$\frac{4\alpha D}{r_0^2}\left(e^{-2\alpha\left(h_0(0)+u_z(0)+h_\infty-h_\infty^0\right)}-e^{-4\alpha\left(h_0(0)+u_z(0)+h_\infty-h_\infty^0\right)}\right)-\sigma=f_0, \tag{17}$$

где

$$u_z(0)=\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}\left(\left(\delta_1+\delta_2\right)f_m+f_0\left(R-\delta_1\right)\right), \tag{18}$$

$$h_0(0)=h_0, \tag{19}$$

$$h_\infty=h_\infty(0)-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right). \tag{20}$$

После упрощений, с учетом соотношений (18) – (20), уравнение (16) примет вид:

$$e^{-2\Psi}-e^{-4\Psi}=\frac{r_0^2}{4\alpha D}\left(f_0+\sigma\right), \tag{21}$$

где

$$\Psi=\alpha\left(h_0+\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}\left(\left(\delta_1+\delta_2\right)f_m+f_0\left(R-\delta_1\right)\right)-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right). \tag{22}$$

Последнее, третье уравнение для определения параметров f_0,δ_1,δ_2 имеет вид:

$$f(R)=f_m, \tag{23}$$

где f_m в случае потенциала Морзе имеет вид $f_m=\frac{\alpha D}{r_0^2}-\sigma$.

С учетом (9), (14), уравнение (23) примет вид:

$$\frac{4\alpha D}{r_0^2}\left(e^{-2\alpha\left(h_0(R)+u_z(R)+h_\infty-h_\infty^0\right)}-e^{-4\alpha\left(h_0(R)+u_z(R)+h_\infty-h_\infty^0\right)}\right)-\sigma=\frac{\alpha D}{r_0^2}-\sigma, \tag{24}$$

где

$$u_z(R)=u_z(r)=\frac{4}{R}\frac{1-\nu^2}{\pi E}\left\{\begin{array}{l}\left(f_0-f_m\right)\left(\left(\left(R-\delta_1\right)^2-R^2\right)\mathbf{K}\left(\frac{\left(R-\delta_1\right)^2}{R^2}\right)+R^2\mathbf{E}\left(\frac{\left(R-\delta_1\right)^2}{R^2}\right)\right)+\\+f_mR\left(R+\delta_2\right)\mathbf{E}\left(\frac{R^2}{\left(R+\delta_2\right)^2}\right)\end{array}\right\}, \tag{25}$$

$$h_0(R)=h_m. \tag{26}$$

Ввиду того, что параметры δ_1,δ_2 должны быть малы, равенство (25) можно переписать в виде:

$$u_z(R)=\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\left(2f_0R+f_m\left(1+\ln\frac{8R}{\delta_2}\right)\delta_2-\left(f_0-f_m\right)\left(1+\ln\frac{8R}{\delta_1}\right)\delta_1\right)+O\left(\delta_1^2\right)+O\left(\delta_2^2\right).$$

Или, с учетом того, что $1>>R>>\delta_1$ и $1>>R>>\delta_2$, в виде:

$$u_z(R)=\frac{4\left(1-\nu^2\right)f_0R}{\pi E}+O\left(\delta_1^2\right)+O\left(\delta_2^2\right).$$

Таким образом, уравнение (24) примет вид:

$$e^{-2\alpha\left(\frac{r_0}{2}+\frac{\ln 2}{2\alpha}+4\frac{\left(1-\nu^2\right)f_0R}{\pi E}-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right)}-e^{-4\alpha\left(\frac{r_0}{2}+\frac{\ln 2}{2\alpha}+4\frac{\left(1-\nu^2\right)f_0R}{\pi E}-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right)}=\frac{1}{4}. \tag{27}$$

Итак, мы получили систему уравнений, определяющую параметры f_0,δ_1,δ_2 нашей модели:

$$\begin{cases} (\delta_1+\delta_2)(\delta_2-\delta_1+2R)(f_m+f_0)(R-\delta_1)^2=0, \\ e^{-2\alpha\left(h_0+\frac{2(1-\nu^2)}{E}(\delta_1+\delta_2)(f_m+f_0)(R-\delta_1)-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right)}-e^{-4\alpha\left(h_0+\frac{2(1-\nu^2)}{E}(\delta_1+\delta_2)(f_m+f_0)(R-\delta_1)-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right)}=\frac{r_0^2}{4\alpha D}(f_0+\sigma), \\ e^{-2\alpha\left(\frac{r_0}{2}+\frac{\ln 2}{2\alpha}+4\frac{1-\nu^2}{\pi E}f_0R-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right)}-e^{-4\alpha\left(\frac{r_0}{2}+\frac{\ln 2}{2\alpha}+4\frac{(1-\nu^2)}{\pi E}f_0R-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2\sigma}{D\alpha}}\right)\right)}=\frac{1}{4}. \end{cases} \quad (28)$$

Ее решением является набор чисел:

$$\begin{cases} f_0=-\frac{h_\infty \pi E}{4R(1-\nu^2)}, \\ \delta_1=R+\frac{E}{2(\nu^2-1)\sqrt{f_m-f_0}\left(\sqrt{f_m}-\sqrt{f_m-f_0}\right)}\left(\frac{r_0}{2}-\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2(f_0+\sigma)}{\alpha D}}\right)-h_\infty-h_0\right), \\ \delta_2=(R-\delta_1)\sqrt{1-\frac{f_0}{f_m}}-R. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения для параметров f_0, δ_1, δ_2 в соответствующие формулы, получим согласованное с силой сцепления выражение для профиля трещины $h(r)=h_0(r)+u_z(r)+h_\infty-h_\infty^0$ в следующем, первом приближении.

Полученные результаты позволяют далее после расчета термодинамического потенциала $\Delta\Phi$ материала с дискообразной трещиной

$$\Delta\Phi=\pi\int_0^\infty f(r)u_z(r)rdr+2\pi(h_\infty-h_\infty^0)\int_0^\infty f(r)rdr+4\pi\alpha_n\int_0^R\frac{h_{eq}(r)-h_\infty^0}{h_{eq}(r)}rdr,$$

(где ($h_{eq}(r)$ — профиль трещины, рассчитанный при $\sigma=0$) исследовать устойчивость трещины разрушения в зависимости от ее исходного профиля и внешней растягивающей нагрузки σ.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М., Цой Б., Шевелев В.В. Структурно-статистическая кинетика разрушения полимеров. – М.: Химия, 2002. 736 с.
2. Райзер Ю.П. Физические основы теории трещин хрупкого разрушения // Успехи физических наук. 1970. Т. 100. Вып. 2. С. 329–347.
3. Шевелев В.В., Осипов Р.А. Модель профиля трещины разрушения с учетом сил сцепления между ее берегами / Сб. тезисов докладов XVIII Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование». – Пущино, 24–29 января 2011. С. 243.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. 248 с.