

НАКОПЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ В ЗОНЕ ВЫНУЖДЕННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ ПЕРЕД ФРОНТОМ ТРЕЩИНЫ РАЗРУШЕНИЯ В ПОЛИМЕРАХ

А.А. Валишин, профессор, Т.С. Степанова, соискатель

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: enf@mail.ru, st.m@list.ru

Данная статья посвящена накоплению локальных повреждений в зоне вынужденной эластичности перед фронтом трещины разрушения в полимерах. Рассматриваются аморфные стеклообразные полимеры типа полиметилметакрилата. Описан механизм образования микрополостей перед фронтом трещины а также механизм распада «слабых» узлов несущего каркаса материала. Выведено кинетическое уравнение распада слабых узлов несущего каркаса и рассчитано время распада узла.

This article is dedicated to accumulation of local defects in the zone of forced elasticity before the front of a failure crack in polymers. The mechanism of microcavity formation in the crack and the mechanism of the break-up of loose junctions in the support framework were described. The kinetic equation of the break-up of loose junctions in the support framework was obtained, and the junction break-up time was calculated.

Ключевые слова: флуктуация, фронт трещины, микрогетерогенность, время распада узла, распределение Рэлея.

Key words: fluctuation, crack front, microheterogeneity, junction break-up time, Rayleigh distribution.

Настоящая статья является продолжением и развитием работы [1], в которой показано, что в температурном диапазоне от температуры хрупкости до температуры стеклования в стеклообразных аморфных полимерах впереди трещины разрушения появляется зона неупругой вынужденноэластической деформации, которая выше температуры квазихрупкости вырождается в крейз.

1. Механизм образования микрополостей перед фронтом трещины

По данным фрактографических исследований поверхности излома разрушенных образцов, впереди трещины разрушения происходит разрыхление полимерного вещества – своего рода подготовка к разрушению. Это проявляется, прежде всего, в образовании и накоплении перед фронтом трещины множества микрополостей и вторичных субмикротрещин. Поэтому фронт трещины разрушения продвигается как бы через предварительно подготовленную среду, насыщенную микроповреждениями. Эти локальные повреждения имеют флуктуационное происхождение, являются следствием флуктуаций теплового движения и сами участвуют в тепловом движении, обладая некоторой подвижностью и как бы диффундируя навстречу трещине. Поэтому концентрация локальных повреждений особенно велика в непосредственной близости от фронта трещины, и по мере удаления от него убывает.

Локальные микроповреждения интенсивно образуются на медленной, флуктуационной, «спокойной» стадии развития трещины. Фрактографические исследования показывают [2], что на глубину в доли или даже несколько

микрометров полимерное вещество перед фронтом трещины насыщено микропорами. На атермической стадии слой вещества, примыкающий к фронту трещины, менее нарушен. Локальные повреждения здесь просто не успевают образоваться.

Образование и накопление локальных микроповреждений происходит при всех температурах с разной интенсивностью, но при температурах выше температуры хрупкости перед фронтом трещины развиваются параллельно два процесса: накопление локальных повреждений и вынужденная эластическая ползучесть. Эти процессы взаимосвязаны, но до некоторой степени и независимы. Они идут с разными скоростями, т.к. связаны с различными типами межчастичных взаимодействий и разными формами теплового движения. Характер теплового движения в полимерах подробно обсуждался в работе [3]. Многочисленные экспериментальные исследования, подытоженные в монографии [2], свидетельствуют, что элементарные акты разрушения в линейных полимерах связаны с термофлуктуационным разрывом химических связей, прежде всего, связей главной валентности полимерных макромолекул. Это, конечно же, никак не значит, что межмолекулярное взаимодействие не вносит вклада в процесс разрушения. Оба типа взаимодействий формируют сложный потенциальный рельеф, на котором разыгрываются элементарные акты разрушения. С другой стороны, межмолекулярное взаимодействие играет определяющую роль в процессах вынужденного эластического деформирования.

Относительную независимость процессов накопления микроповреждений и вынужденного эластического деформирования подтверж-

дает тот факт, что образование и накопление микропор происходит как при хрупком разрушении ниже температуры хрупкости $T_{хр}$, когда эластическая зона отсутствует, так и в случае предельного вырождения эластической зоны в крейз выше температуры квази-хрупкости $T_{хр}$.

Итак, выше температуры хрупкости в нагруженном полимерном образце перед фронтом трещины развиваются два процесса: накопление локальных повреждений и вынужденная эластическая ползучесть, приводящая к образованию перед трещиной разрушения зоны вынужденной эластичности. В работе [1] определены форма и размеры эластической зоны. Внешние напряжения (механического, термического или какого-либо другого происхождения) на микроскопическом уровне распределяются по химическим и межмолекулярным связям. За образование локальных повреждений ответственны химические связи, за вынужденную эластическую деформацию – межмолекулярные силы.

Структура реальных материалов, как правило, микрогетерогенна по различным физическим и технологическим причинам. Следствием этого является то, что в упругом в целом материале локально происходят неупругие явления: дислокации в кристаллах, неупругая вынужденная эластическая деформация в полимерах, микротрещины, микроразрывы, локальные нагревы и т. д. При этом тело в целом может вести себя, как сплошное упругое однородное тело в масштабах, много больших размеров неоднородностей. Поэтому, например, условия подобия выполняются только до некоторого предела: часть тела имеет такие же свойства, что и все тело до тех пор, пока размер этих частей много больше размера неоднородностей.

Поле напряжений в реальном твердом теле из-за его структурной микрогетерогенности в масштабах, сравнимых с пространственными и временными размерами неоднородностей, микро-неоднородно в пространстве и нестационарно во времени. В частности, временная нестационарность обусловлена хаотичностью теплового движения элементов микроструктуры, вследствие чего нагрузка, приходящаяся на них (например, нагрузка на отдельных химических связях) пульсирует случайным образом. Поэтому в микрогетерогенном материале при любом макроскопическом напряженном состоянии возникает микромозаичное случайное пространственно-временное поле напряжений (и деформаций).

Наблюдаемое макроскопическое однородное, континуальное напряжение является результатом усреднения по временным

промежуткам, много большим характерного времени теплового движения (например, периода колебаний около положения равновесия), и усреднения по пространственным объемам, много большим, чем характерный размер микронеоднородностей.

Микрогетерогенность структуры влечет соответствующую микрогетерогенность физических и механических свойств. В частности, модуль упругости, прочность и т. д. – это локальные характеристики, образующие в материале также случайные микронеоднородные пространственно-временные поля. Это приводит, в частности, к тому, что в макроскопически однородном, но микроскопически неоднородном материале, появляются и с течением времени накапливаются локальные микроповреждения.

Все вышесказанное полностью относится и к полимерным материалам. Более того, развитие вынужденной эластической деформации перед фронтом трещины создает дополнительную неоднородность по различным физико-механическим свойствам: массовой плотности, упругости, прочности, электропроводности и др. Предельное вырождение эластической зоны – это образование крейзов, где эта неоднородность выражена особенно ярко. Возникновение крейзов – это результат действия высоких локальных напряжений на микронеоднородностях структуры при температурах, приближающихся к температуре стеклования. В состояниях, предшествующих образованию крейза, при более низких температурах, также проявляется различного рода микронеоднородность. В частности, тот факт, что впереди трещины наблюдаются изолированные микрополости, означает, что повреждения, вызываемые термофлуктуационными элементарными актами, концентрируются и проявляются наиболее сильно в некоторых «слабых», как бы «предрасположенных» к этому местам, и завершаются образованием здесь микрополостей – дырки.

Не все элементы микроструктуры материала в одинаковой степени воспринимают внешнюю механическую нагрузку, так сказать, «держат напряжение». В микроструктуре, как в строительной конструкции, есть некоторые «активные» элементы – «несущие балки, держащие напряжение», и есть «пассивные» элементы, которые непосредственно внешнюю нагрузку не воспринимают и играют роль «внутренних стен и перегородок». «Несущие» элементы микроструктуры – это, прежде всего, химические связи главной валентности полимерных макромолекул и группы таких связей. Разрушение несущих элементов и составляет суть элементарных актов. Несущие элементы объединены в связный непрерывный «несущий

каркас», пронизывающий весь объем и как бы армирующий напряженный материал. Именно этот несущий каркас воспринимает и держит внешнее напряжение. Представления о каркасной связанности микроструктуры полимеров развивал в свое время Г. А. Патрикеев [4]. С математической точки зрения несущий каркас – это своеобразный случайный материальный граф, т. е. разветвленная сеть, охватывающая весь объем тела. Несущие элементы микроструктуры и несущий каркас в целом находятся в постоянном непрерывном тепловом движении.

Микронеоднородность по различным физическим и механическим параметрам проявляется на всех уровнях, вплоть до химических связей. Экспериментально установлено [2], что химические связи в макромолекулах неодинаковы по энергии диссоциации. Так, в полиметилметакрилате встречаются слабые химические связи C–C с энергией $U_0 = 134$ кДж/моль и прочные с энергией $U_0 = 345$ кДж/моль [2, 5]. Ясно, что тепловыми флуктуациями в первую очередь рвутся слабые связи. Кроме того, и внешнее напряжение распределяется по химическим связям неравномерно. Методом ИК-спектроскопии установлено [2], что вблизи трещины имеются перенапряженные химические связи, растягивающая нагрузка на которых в десятки раз превышает среднее макроскопическое напряжение.

Таким образом, можно сделать вывод, что несущий каркас тоже неоднороден, в нем есть некоторые «слабые узлы», в которых концентрируются термофлуктуационные акты разрыва химических связей. В этих узлах и образуются микрополости – дырки. Возникновение дырок происходит в результате термофлуктуационного распада слабых узлов несущего каркаса. Дырки возникают на фоне теплового движения как результат флуктуаций энергии этого движения в поле механических напряжений, и сами участвуют в тепловом движении, обладая подвижностью.

В работе [6] показано, что в зоне вынужденной эластичности наблюдаемое макроскопическое напряжение выше, чем в окружающем объеме, однородно и равно пределу вынужденной эластичности σ_b . Но однородность макроскопического напряженного состояния – это, как было сказано выше, результат сглаживающего пространственно – временного усреднения. В пространственных и временных микромасштабах, сравнимых с неоднородностями структуры, напряжение представляет собой сложное мозаичное случайное поле, но в среднем оно выше, чем в окружающем объеме. В разных местах микронеоднородной эластической зоны происходят элементарные термофлуктуационные акты разрыва и рекомбинации

межчастичных связей. Каждый элементарный акт вызывает в малой своей окрестности дополнительное возмущение полей напряжений и деформаций. В результате элементарные разрывы накапливаются в «слабых» местах объема эластической зоны, пока не образуется кластер, т.е. микрополость – дырка, которую уже можно зафиксировать экспериментально, например, методом малоугловой рентгеновской дифракции [2]. Вообще, каждый отдельный акт макродеструкции предваряется множеством более мелких явлений, масштаб которых растет по мере развития процесса. Концентрация элементарных микроразрывов в отдельных местах эластической зоны и возникновение здесь микрополостей-дырок дополнительно подтверждается экспериментальными данными по акустической эмиссии в полимерах под нагрузкой (и не только в полимерах) [6, 7].

Если в каком-либо месте эластической зоны образовалось дырка, то она создает в своей окрестности возмущение упругих полей микронапряжений и микродеформаций. Дырка является локальным усилителем напряжения, в малой ее окрестности напряжения значительно выше, чем вдали от нее. Возмущение упругих полей напряжений и деформаций, вызванное дыркой, локально, оно распространяется лишь на малую окрестность дырки и определяется ее размерами. Вдали от дырки поля напряжений и деформаций остаются невозмущенными. Поэтому, если вдали от первой дырки образовалось вторая, то эти два события независимы. Упругие поля этих дырок не перекрываются и не взаимодействуют. Но, если две дырки возникли рядом, если их упругие поля перекрываются на достаточно высоком уровне, то их совокупное упругое поле уже имеет больший радиус действия. Кроме того, в пространстве между дырками напряжения значительно выше, чем вдали от них, и «перемычка», разделяющая две близко расположенные дырки, может «лопнуть» и тогда образуется большая дырка. Она создает еще большее возмущение с большим дальностью действия, и по ее периметру возможно возникновение новых дырок. Скопление дырок создает упругое поле с еще большим радиусом действия и т.д. В подтверждение сказанного уместно описать результаты, полученные в работе [8] на напряженных плоских оптически активных средах при различной концентрации дефектов. В круговой плоской области диаметром L создавались искусственно разрезы размером $l \ll L$, имитирующие трещины. Пока разрезов было мало, каждый из них создавал индивидуальное упругое поле с дальностью действия порядка l , характерное для изолированной трещины. При увеличении числа разрезов, сначала начинается взаимодействие полей соседних разрезов внутри области, а при концентрации разрезов,

превышающих определенное значение, вся область создает внешнее поле, характерное для разреза размера L , т.е. скопление дефектов, каждое из которых имеет размер $l \ll L$, при достаточной их концентрации начинает действовать на расстоянии порядка размера всего скопления L .

Таким образом, до некоторого момента дырки возникают независимо друг от друга в разных местах эластической зоны. Когда дырок становится достаточно много, их упругие поля, перекрываясь, взаимно усиливают друг друга, увеличивается дальное действие совокупного поля, это инициирует появление новых дырок, что, вновь увеличивает радиус дальнего действия и т.д. Скопление (кластер) дырок как бы стимулирует возникновение новых дырок, и процесс идет по нарастающей.

Началом быстрого распада (коллапса) эластической зоны является достижение некоторой критической концентрации дырок, при которой происходит так называемый, перколяционный пробой, т.е. потеря устойчивости зоны, и трещина, которая «подпирает» своим клювом зону, быстро ее «проскакивает», впереди формируется новая эластическая зона, и все начинается сначала. Таким образом, рост трещины происходит некими микроскачками по мере достижения критической концентрации дырок в эластической зоне.

Вблизи коллапса в эластической зоне возникает система сквозных микротрещин-каналов, пронизывающих ее объем и растущих навстречу главной трещине. Возникновение вторичных микротрещин обеспечивает переход от локальной связности микроразрывов внутри дырок к глобальной связности системы дырок и возникновение т.н. бесконечного кластера. Описанная картина постепенного распада и коллапса эластической зоны подтверждается наблюдениями акустической эмиссии и прямыми фактографическими наблюдениями.

2. Механизм распада «слабых» узлов несущего каркаса

Все элементы микроструктуры материала находятся в состоянии постоянного теплового движения, интенсивность которого характеризуется температурой. Тепловые флуктуации – это спонтанные, случайные и непредсказуемые в пространстве и во времени выбросы энергии этого движения. Подробно об этом говорилось в работе [3]. Результатом некоторых таких флуктуаций может быть разрыв межчастичных связей (а также их обратная рекомбинация). В отсутствие внешнего поля между актами разрыва и рекомбинации устанавливается термодинамическое (т.е. статистическое) равновесие. Во внешнем поле напряжений (механического или термического происхождения), которое

воспринимают элементы несущего каркаса, преимущество получают элементарные акты разрыва несущих элементов каркаса. Они происходят с разной интенсивностью в различных его участках, но, прежде всего, в его «слабых» местах, которые мы назвали узлами. Элементарные акты разрыва несущих элементов в этих узлах постепенно накапливаются и, в конце концов, узел распадается, и на его месте образуется микрополость – дырка. Таким образом, возникновение дырок в эластической зоне связано с термофлуктуационным распадом узлов несущего каркаса. Дырка на месте такого узла – это конечный результат многих актов разрыва и рекомбинации несущих элементов этого узла.

При каждом элементарном акте разрыва или рекомбинации в напряженном материале изменяется деформация в месте происшествия и совершается силами упругих напряжений работа. Пусть в некоторой точке M произошел элементарный акт разрыва. В этом месте изменилось деформационное состояние (изменился тензор деформации), а именно возникла добавочная деформация типа растяжения. Эта добавочная деформация локализована в малой окрестности точки M . По мере удаления от этой точки возмущение поля деформаций затухает, так что существует радиус зоны возмущения и ее объем. Обозначим его как $v_0^+(M)$. Именно в этом объеме и сосредоточена добавочная элементарная работа упругих сил, связанная с возмущением деформационного поля. Обозначим ее как

$$\delta A^+(M) = -\sigma_{ik}(M)\eta_{ik}^+(M)v_0^+(M). \quad (1)$$

где $\sigma_{ik}(M)$ – локальные напряжения в точке M , действующие на несущий элемент, участвующий в элементарном акте, $\eta_{ik}^+(M)$ – добавочная деформация в этой точке, обусловленная элементарным актом. Аналогично, если в точке M произошел элементарный акт рекомбинации, то здесь тоже возникает возмущение деформационного поля – добавочная деформация $\eta_{ik}^-(M)$, но уже типа стягивания (сжатия). Она так же сосредоточена в некотором объеме $v_0^-(M)$. Силами упругих напряжений при этом совершается дополнительная работа

$$\delta A^-(M) = -\sigma_{ik}(M)\eta_{ik}^-(M)v_0^-(M). \quad (2)$$

Элементарные акты разрыва и рекомбинации несущих элементов происходят в узлах несущего каркаса. Дырка на месте узла возникает в результате множества элементарных актов, происходящих в узле. Узлы имеют различный объем, и объем узла определяется количеством несущих элементов в нем. Тогда и дырки имеют различный объем и различное время зарождения. Обозначим объем узла в точке M , а значит, и объем возникающий на его месте дырки, как $\delta V(M)$. Объем узла (дырки) значительно больше объема элементарного возмущения деформационного поля, т.е. $\delta V(M) \gg v_0^+(M)$.

При каждом элементарном акте изменяется свободная энергия эластической зоны и даже всего образца. Но это изменение локализовано, оно сосредоточено в месте происшествия акта. Свободная энергия F является полевой величиной с плотностью $f(T(M), U_{ik}(M))$, в каждой точке M . Эта плотность зависит от локальной температуры и деформации в точке M . Свободная энергия какого-либо объема получается интегрированием ее плотности по этому объему. Плотность свободной энергии можно записать в виде

$$f(T(M), U_{ik}(M)) = \varepsilon(M) - T(M)S(M), \quad (3)$$

где входящие сюда величины – это локальные значения в точке M плотности внутренней энергии, температуры и плотности энтропии. Температура является интенсивным параметром, а все остальные величины в этой формуле – экстенсивные. Поэтому внутренняя энергия и энтропия какого-либо объема получают интегрированием их плотностей по этому объему. Малое изменение плотности свободной энергии при изменении ее аргументов равно $\Delta f(M) = -S(M)\Delta T(M) + \sigma_{ik}^{\pm}(M, t)\Delta U_{ik}(M)$.

Изменение свободной энергии узла в точке M в результате одного элементарного акта сосредоточено в зоне возмущения деформационного поля объемом $V_0^{\pm}$ и равно

$$\Delta F^{\pm}(M) = -S(M)\Delta T^{\pm}(M)v_0^{\pm}(M) - \sigma_{ik}^{\pm}(M, t)\eta_{ik}^{\pm}(M)v_0^{\pm}(M). \quad (5)$$

Значок плюс в верхнем индексе относится к элементарному акту разрыва, а минус – к элементарному акту рекомбинации. Первое слагаемое определяет тепловой эффект элементарного акта, а второе определяет работу упругих сил при элементарном акте. В этих формулах $\sigma_{ik}^{\pm}(M, t)$ – это локальные микронапряжения в точке M на отдельных несущих элементах, участвующих в элементарном акте. Вообще, напряженное состояние в данной точке микро-неоднородной среды, каковой является эластическая зона, можно представить состоящим из трех слагаемых

$$\sigma_{ik}(M, t) = \sigma_{ik}^0 + \sigma_{ik}^l(M) + \sigma_{ik}^t(M, t), \quad (6)$$

где σ_{ik}^0 – макроскопическое наблюдаемое напряжение, измеряемое в обычном макроскопическом эксперименте; $\sigma_{ik}^l(M)$ – напряжение более низкого уровня, это локальное напряжение на неоднородностях структуры, усредненное по времени. Оно образует случайное поле и описывается моментными функциями различного порядка (средними значениями, дисперсией, корреляционной функцией). Наконец, $\sigma_{ik}^t(M, t)$ – напряжения наинизшего уровня, а именно, переменное, флуктуирующее во времени напряжение на отдельных несущих

элементах структуры. Наблюдаемое макроскопически напряжение σ_{ik}^0 рассчитывается обычными методами теории упругости. В работе [5] было показано, что в эластической зоне впереди трещины нормального отрыва или поперечного сдвига устанавливается однородное напряжение, равное пределу вынужденной эластичности, т. е. $\sigma_{ik}^0 = \sigma_a$. Элементарные акты разрыва и рекомбинации определяются последней составляющей тензора напряжения $\sigma_{ik}^t(M, t)$. Поэтому, выполнив свертку по тензорным индексам в формуле (5) можем записать

$$\Delta F^{\pm}(M) = -S(M)v_0^{\pm}(M)\Delta T^{\pm}(M) - 2k(M, t)\sigma_a\eta^{\pm}(M)v_0^{\pm}(M), \quad (7)$$

где безразмерный коэффициент $k(M, t)$ характеризует распределение номинального напряжения σ_a по несущим элементам узла. Он зависит от точки M и от времени t , так как напряжение на несущих элементах узла меняется во времени по мере распада узла.

Структурные элементы несущего каркаса, воспринимающие внешнюю нагрузку, распределены по объему эластической зоны V_0 с плотностью $\rho_0(M)$. Это означает, что количество несущих элементов в узле объемом $\delta V(M)$ равно

$$\delta n_0(M) = \Omega \rho_0(M) \delta V(M). \quad (8)$$

Полное число «слабых» несущих элементов во всей эластической зоне обозначим $N_0(V_0)$, оно зависит от объема эластической зоны и получается суммированием по всем узлам несущего каркаса, или интегрированием по объему эластической зоны

$$N_0(V_0) = \int_{V_0} \delta n_0(M) = \Omega \int_{V_0} \rho_0(M) \delta V(M). \quad (9)$$

Отсюда нормировочный множитель Ω получается равным

$$\Omega = N_0(V_0) \left[\int_{V_0} \rho_0(M) \delta V(M) \right]^{-1}. \quad (10)$$

Он имеет размерность обратного объема, т. е. $[\Omega] = m^{-3}$, а плотность распределения $\rho_0(M)$ – безразмерная функция. Плотность распределения несущих элементов в объеме эластической зоны представляет собой непрерывную функцию трехмерной точки $M(x, y, z)$. Каждый узел несущего каркаса, на месте которого может возникнуть дырка, характеризуется двумя параметрами: мощностью $\rho_0(M)$ и объемом $\delta V(M)$, который тем больше, чем больше несущих элементов в узле. Случайный характер распределения слабых несущих элементов в пространстве обуславливает стохастический характер их разрушения и распада узлов несущего каркаса. Конкретизируем теперь

коэффициент $k(M, t)$ в формуле (7). Величина $k(M, t)\sigma_a$ – это локальное напряжение, приходящееся на отдельный несущий элемент узла, участвующий в элементарном акте, т.е. это то, что, составляет последнее слагаемое в формуле (6). Интенсивность элементарных актов регулируется растягивающими составляющими напряжений на несущих элементах (например, силами, растягивающими химические связи и валентные углы). Поэтому напряжение $k(M, t)\sigma_a$ – это всегда растягивающее напряжение. Макроскопическое напряженное состояние эластической зоны до возникновения дырок однородно, и напряжение всюду равно σ_a . В каждом узле идет процесс распада, число неповрежденных несущих элементов уменьшается со временем, а нагрузка на остающихся неповрежденных элементах возрастает. В какой-то момент количество неповрежденных элементов достигает минимального критического значения, а нагрузка на них достигает максимального критического уровня, узел мгновенно «лопается» и на его месте возникает дырка.

Из сказанного следует, что каждый узел через определенное время распадается, т.е. имеет некоторое «время жизни» $t_p(M)$ которое одновременно является временем зарождения дырки. Таким образом, узлы характеризуются тремя параметрами: мощностью $\rho_0(M)$, объемом $\delta V(M)$ и временем распада $t_p(M)$.

Начальное число несущих элементов в узле определяется формулой (8), поэтому начальное напряжение, приходящееся на один несущий элемент узла равно

$$f_0(M) = \frac{\sigma_a}{\Omega} (\rho_0(M) \delta V(M))^{-1}. \quad (11)$$

Обозначим количество неповрежденных несущих элементов узла M в произвольный момент t как

$$\delta n(M, t) = \Omega \rho(M, t) \delta V(M) \leq \delta n_0(M), \quad (12)$$

где $\rho(M, t)$ – это текущая плотность распределения неповрежденных несущих элементов в объеме эластической зоны. Текущая нагрузка на неповрежденных несущих элементах узла будет

$$f(M, t) = \frac{\sigma_a}{\Omega} (\rho(M, t) \delta V(M))^{-1} \geq f_0(M). \quad (13)$$

Из этих формул вытекает соотношение между начальной $\rho_0(M)$ и текущей $\rho(M, t)$ плотностями

$$\begin{aligned} \rho(M, 0) &= \rho_0(M) \\ \rho(M, t) &< \rho_0(M), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из формулы (13) получаем, что коэффициент $k(M, t)$, характеризующий нагрузку на один неповрежденный несущий элемент узла, равен

$$\begin{aligned} k(M, t) &= (\Omega \rho(M, t) \delta V(M))^{-1} = \\ &= \frac{\int \rho_0(M) \delta V(M)}{N_0(V_0) \rho(M, t) \delta V(M)}, \end{aligned} \quad (15)$$

т.е. он равен обратной величине количества неповрежденных несущих элементов узла в момент t . Из формулы (13) следует, что текущее напряжение на один неповрежденный несущий элемент узла равно

$$f(M, t) = k(M, t) \sigma_a = f_0(M) \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)}. \quad (16)$$

Вернувшись теперь к формуле (7) получим, что изменение свободной энергии при одном элементарном акте можно записать так:

$$\begin{aligned} \Delta F^\pm(M) &= -S(M) v_0^\pm(M) \Delta T^\pm(M) - \\ &- 2k(M, t) \sigma_a \eta^\pm(M) v_0^\pm(M) = \\ &= -S(M) v_0^\pm(M) \Delta T^\pm(M) - \\ &- 2f(M, t) \eta^\pm(M) v_0^\pm(M) = \\ &= -S(M) v_0^\pm(M) \Delta T^\pm(M) - \\ &- 2f_0(M) \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)} \eta^\pm(M) v_0^\pm(M). \end{aligned} \quad (17)$$

Каждый элементарный акт разрыва или рекомбинации несущих элементов структуры (например, химических связей) сопровождается изменением свободной энергии образца на величину $\Delta F^\pm(M)$, локализованном в месте происхождения акта. Частоты элементарных актов можно записать в виде

$$\omega^\pm(M, t) = v_0 C^\pm(M) \exp\left(-\frac{\Delta F^\pm(M)}{kT(M)}\right) \quad (18)$$

Здесь, как и раньше, знак плюс относится к элементарному акту разрыва, а минус – к элементарному акту рекомбинации. Подставив выражение (17), получим

$$\omega^\pm(M, t) = v_0 C^\pm(M) \exp\left[-\frac{(-S(M) v_0^\pm(M) \Delta T^\pm(M) - 2f(M, t) \eta^\pm(M))}{kT(M)}\right]. \quad (19)$$

Показатель экспоненты в этой формуле определяется изменением свободной энергии образца, вызванным отдельным элементарным актом, прошедшем в напряженном материале.

Множитель $C^\pm(M)$ определяет частоту элементарных актов в ненапряженном материале. Поскольку в этом состоянии элементарные акты происходят с затратой энергии активации, то множитель $C^\pm(M)$ можно записать в виде

$$C^\pm(M) = e^{-\frac{U_0^\pm}{kT(M)}} \quad (20)$$

или с поправкой на температурную зависимость энергии активации

$$C^\pm(M) = e^{-\frac{U_0^\pm - q^\pm kT(M)}{kT(M)}}. \quad (21)$$

С учетом всего сказанного, формулу (19) для частот элементарных актов представим в окончательном виде:

$$\begin{aligned}\omega^+(M, t) &= \\ &= v_0 \exp \left[-\frac{1}{kT(M)} \left(\frac{U_0^+ - q^+ kT(M) - S(M) v_0^+(M)}{\eta(M) v_0^+(M)} - 2 f_0(M) \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)} \right) \right], \\ \omega^-(M, t) &= v_0 \exp \left[-\frac{1}{kT(M)} \left(\frac{U_0^- - q^- kT(M) +}{\eta(M) v_0^-(M)} + 2 f_0(M) \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)} \right) \right]\end{aligned}\quad (22)$$

3. Кинетическое уравнение распада слабых узлов несущего каркаса

Получим кинетическое уравнение, описывающее процесс распада слабого узла. Обозначим количество несущих элементов узла в точке M в начальный момент $t=0$ как

$$\delta n(M, 0) \equiv \delta n_0(M) = \Omega \rho_0(M) \delta V(M) \quad (23)$$

Количество неповрежденных элементов этого же узла в произвольный момент t обозначим

$$\delta n(M, t) = \Omega \rho(M, t) \delta V(M) \quad (24)$$

Изменение количества неповрежденных несущих элементов узла за малое время Δt происходит по двум причинам: во-первых, из-за их разрыва за это время и, во-вторых, из-за рекомбинации поврежденных элементов за это же время. Составляя баланс поврежденных элементов за время Δt , разделив обе части на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) &= -\omega^+(M, t) \rho(M, t) + \\ &+ \omega^-(M, t) \left[\frac{\rho_0(M) -}{-\rho(M, t)} \right]^2 \Omega \delta V(M).\end{aligned}\quad (25)$$

Это и есть кинетическое уравнение, описывающее процесс распада слабого узла несущего каркаса в точке M . Частоты элементарных актов разрыва и рекомбинации несущих элементов определены формулами (22). Искомой функцией в уравнении (25) является $\rho(M, t)$ – текущая плотность распределения несущих элементов в объеме эластической зоны. Начальное условие для этого уравнения будет

$$\rho(M, 0) = \rho_0(M). \quad (26)$$

Исследование кинетического уравнения начнем с того, что выясним, существуют ли стабильные, не распадающиеся узлы. Стабильность узла означала бы, что текущая плотность распределения несущих элементов $\rho(M, t)$ в точке M не изменяется со временем, сохраняя начальное значение $\rho_0(M)$. В этом случае производная $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ в точке M для любого $t \geq 0$.

Из уравнения (25) тогда получаем:

$$\omega^+(M, t) \rho_0(M) = 0, \quad (27)$$

и, значит, $\rho_0(M) = 0$, т.е. нет распада там, где попросту нечему распадаться. Отсюда следует, что стабильных узлов в поле механических напряжений не существует, все узлы несущего каркаса под действием напряжений и тепловых флуктуаций распадаются со временем, правда, с различной скоростью.

Для дальнейшего исследования кинетического уравнения удобно ввести сокращенные обозначения в формулах (22)

$$a^+(M) = U_0^+ - q^+ kT(M) - S(M) v_0^+(M) k \Delta T^+(M),$$

$$a^-(M) = U_0^- - q^- kT(M),$$

$$b^+(M) = 2 \eta(M) v_0^+(M), \quad (28)$$

$$b^-(M) = 2 \eta(M) v_0^-(M).$$

В этих обозначениях частоты элементарных актов записываются короче

$$\begin{aligned}\omega^+(M, t) &= v_0 \exp \left[-\frac{\omega^+(M, t)}{kT(M)} \right] = \\ &= v_0 \exp \left[-\frac{1}{kT(M)} \left(a^+(M) - f_0(M) b^+(M) \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)} \right) \right],\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\omega^-(M, t) &= v_0 \exp \left[-\frac{\omega^-(M, t)}{kT(M)} \right] = \\ &= v_0 \exp \left[-\frac{1}{kT(M)} \left(a^-(M) + f_0(M) b^-(M) \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)} \right) \right].\end{aligned}$$

С течением времени, по мере распада узла, частоты элементарных актов разрыва ω^+ увеличивается, а частота актов рекомбинации ω^- уменьшается. Частота разрыва ω^+ принимает наибольшее значение, когда показатель экспоненты в формуле (29) обращается в ноль. Это означает, что исчезает барьер активации актов разрыва, и дальше эти акты происходят атермически, т.е. безактивационно. Соответствующий момент времени t_p является началом быстрого, практически мгновенного атермического разрыва оставшихся несущих элементов узла. Поэтому время $t_p(M)$ является временем «жизни» узла в точке M . Из формулы (29) получаем для определения времени t_p уравнение

$$\frac{\rho(M, t_p)}{\rho_0(M)} = f_0(M) \frac{b^+}{a^+}. \quad (30)$$

Решив кинетическое уравнение (25) с начальным условием (26), найдем функцию $\rho(M, t)$. Тогда из уравнения (30) можно найти время распада узла $t_p(M)$, т.е. время зарождения дырки в точке M . Таким образом, искать решение кинетического уравнения следует на отрезке $t \in [0, t_p]$, а искомая функция $\rho(M, t)$ должна быть монотонно убывающей от начального значения $\rho_0(M)$. Из фор-

мулы (30) следует, что время распада узла определяется его мощностью $\rho_0(M)$: более мощные узлы «живут» дольше.

Рассмотрим теперь условие, при котором узел распадается сразу атермически, т.е. дырка зарождается практически мгновенно. Это будет, когда уже в начальный момент частота актов разрыва ω^+ максимальна. Получаем из (29)

$$f_k = \frac{a^+(M)}{b^+(M)}. \quad (31)$$

Эта формула определяет критическое значение напряжения на несущих элементах узла в точке M . Если начальная нагрузка на несущих элементах $f_0(M) \geq f_k$, то дырка на месте этого узла образуется сразу же. Критическая нагрузка f_k не зависит от мощности узла, т.е. она одинакова для всех узлов. Кроме того, величины $a^+(M)$ и $b^+(M)$ в формулах (29), скорее всего, слабо зависят от точки M . Поэтому критическая нагрузка f_k является константой материала, она определяется его микроструктурой и межчастичными силами взаимодействия.

Если начальная нагрузка на несущих элементах узла $f_0(M) < f_k$, то процесс распада узла и образование дырки растягивается во времени. Нагрузка на неповрежденных элементах узла возрастает, пока не достигает критической f_k . После чего оставшиеся несущие элементы практически мгновенно атермически рвутся, узел «лопается» и образуется дырка. Сопоставляя формулы (31) и (11), получаем, что мгновенно «лопаются» узлы, мощность которых

$$\rho_0(M) \delta V(M) \leq \frac{\sigma_a b^+}{\Omega a^+}. \quad (32)$$

Это наиболее слабые среди слабых узлов несущего каркаса.

Для решения кинетического уравнения (25) сделаем в нем некоторые преобразования. Прежде всего, заменим искомую функцию $\rho(M, t)$ на новую

$$Z(M, t) = \frac{\rho_0(M)}{\rho(M, t)}. \quad (33)$$

В формулах (29) для частот элементарных актов введем дополнительные обозначения

$$B^\pm(M) = v_0 \exp\left(-\frac{a^\pm(M)}{kT(M)}\right) \quad (34)$$

$$a^\pm(M) = \frac{b^\pm(M)}{kT(M)}$$

В новых обозначениях кинетическое уравнение и начальное условие к нему принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} &= B^+ Z \exp(f_0(M) a^+ Z) - B^- (Z-1)^2 \cdot \\ &\cdot \delta n_0(M) \exp(-f_0(M) a^- Z) \\ Z(M, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (35)$$

Искомая функция этого уравнения $Z(M, t)$ монотонно возрастает на отрезке $t \in [0, t_p]$.

Слагаемые в правой части уравнения не равноценны, а именно, второй член, описывающий рекомбинацию поврежденных несущих элементов, всегда меньше первого. Сопоставимость этих слагаемых зависит от значения $f_0(M)$ – начального напряжения на несущих элементах узла. Раньше было показано, что $f_0(M)$ определяется мощностью узла – чем более мощный узел, тем меньше $f_0(M)$. Отсюда следует, что рекомбинационный член в кинетическом уравнении вносит ощутимый вклад для высокомошных узлов в начале процесса распада, когда Z близко к начальному значению $Z=1$. В дальнейшем с ростом Z даже для высокомошных узлов вклад рекомбинации быстро убывает. Поэтому вполне оправданно искать решение кинетического уравнения без учета рекомбинационного члена, а впоследствии мы обсудим, какую поправку вносит учет рекомбинации. Решая в этом приближении уравнение (35), получаем

$$A^+ t = Ei(-\beta Z) - Ei(-\beta), \quad (36)$$

где безразмерный параметр

$$\beta(M) = \alpha^+ f_0(M). \quad (37)$$

Для дальнейшего упрощения используем асимптотику интегральной экспоненты. Тогда

$$A^+ t = \frac{e^{-\beta}}{\beta} - \frac{e^{-\beta Z}}{\beta Z}. \quad (38)$$

Отсюда можно уже найти время распада узла t_p . Получаем

$$Z(M, t_p) = f_0^{-1}(M) \frac{a^+}{b^+}. \quad (39)$$

Подставляя это в предыдущую формулу, после некоторых преобразований и упрощений, получим

$$t_p(M) = \frac{kT}{f_0(M) b^+ v_0} \exp\left(\frac{a^+ - f_0(M) b^+}{kT}\right), \quad (40)$$

В этой формуле определяющую роль играет величина $f_0(M)$ – начальная нагрузка, приходящаяся на отдельные несущие элементы узла. Она определяется формулой (11), согласно которой она обратно пропорциональна мощности узла $\rho_0(M)$. Это значит, что время распада узла (т.е. время зарождения дырки) полностью определяется мощностью узла: чем больше мощность, тем больше время «жизни» узла.

Параметр $f_0(M)$ входит в формулу (40) дважды: в предэкспоненциальный множитель и в показатель экспоненты. Зависимость предэкспоненты от $f_0(M)$ значительно более слабая, чем зависимость экспоненты. Поэтому обозначим

$$A = \frac{kT}{2f_0(M)\eta v_0^+}. \quad (41)$$

Здесь v_0 – частота тепловых колебаний атомов, образующих несущие химические связи, около положения равновесия; $v_0 \approx 10^{12} - 10^{13} \text{ сек}^{-1}$. Множители в этой формуле неопределимы по величине: если $v_0^{-1} \approx 10^{-12} - 10^{-13} \text{ сек}$, то первый множитель имеет величину порядка единиц.

Время распада узла теперь окончательно можно записать так:

$$t_p(\rho_0(M)) = A \exp\left(\frac{a^+ - f_0(\rho_0(M))b^+}{kT}\right). \quad (42)$$

Эта формула получена в результате решения кинетического уравнения (35) в приближении, когда пренебрегают рекомбинацией поврежденных несущих элементов. Ранее было сказано, что рекомбинация сказывается в начале распада высокомоментных узлов. Из формулы (42) видно, что с уменьшением $f_0(\rho_0(M))$, т.е. с увеличением мощности узла, время его жизни возрастает. Экстраполяция в этой формуле на значение $f_0 = 0$ дает конечное время жизни узла, в то время как, казалось бы, оно должно неограниченно возрастать. Но это не так. Значения мощности узлов ρ_0 ограничены сверху, не может быть узла сколь угодно высокой мощности. Значит, начальная нагрузка на несущие элементы узла f_0 ограничена снизу и, значит, время жизни любого узла конечно. Поэтому упомянутая экстраполяция не имеет смысла. Отступление от формулы (42) проявляется при малых значениях f_0 (высокомоментные узлы), близких к минимальному значению, в сторону завышения времени жизни t_p , но при любых обстоятельствах оно остается конечным. Численное решение кинетического уравнения (35) подтвердило эти выводы.

4. Кинетика накопления дырок в эластической зоне

Флуктуации теплового движения в поле механических напряжений приводят к постепенной деструкции несущего каркаса с образованием в его слабых местах – узлах микрополостей – дырок. В ненагруженном теле флуктуационно поврежденные несущие элементы каркаса (химические связи) с большой вероятностью тут же рекомбинируют и возвращаются в исходное неповрежденное состояние. Внешнее механическое напряжение вызывает, во-первых, снижение активационного

барьера в направлении силы и, во-вторых, резкое уменьшение вероятности рекомбинации поврежденных элементов. Образно говоря, напряжение играет роль «вентиля», придающего хаотическому процессу повреждения и рекомбинации направленный характер.

Несущий каркас образуют длинные цепные макромолекулы полимера в их сложных конфигурациях, взаимодействиях, переплетениях, агрегатах и сочетаниях. Подобно нитям основы в сложном тканевом узоре, несущий каркас «держит» внешнее механическое напряжение. Он находится в постоянном тепловом движении, имеет сложнейшую «архитектуру» и пронизывает все тело.

Для того, чтобы описать процесс накопления дырок, нужно ответить, по крайней мере, на три вопроса: а) сколько имеется дырок в объеме эластической зоны в произвольный момент времени; б) какая часть объема эластической зоны повреждена дырками в произвольный момент; в) когда можно считать, что эластическая зона «переполнилась» дырками, т.е. каков критерий потери устойчивости зоны.

Каждый узел несущего каркаса имеет конечное время распада, после чего на его месте образуется дырка. Время зарождения дырки определяется формулой (42) и зависит, прежде всего, от мощности узла, т.е. от количества несущих элементов в нем. Несущие элементы в начальный момент времени распределены в объеме эластической зоны с плотностью $\rho_0(M)$. Время зарождения дырки $t_p(\rho_0(M))$ является монотонно возрастающей функцией мощности узла. Плотность распределения несущих элементов $\rho_0(M)$, будучи непрерывной функцией трехмерной точки M в ограниченном объеме эластической зоны, достигает там наибольшего и наименьшего значения, которые определяют узлы с наибольшим и наименьшим временем распада. Отсюда следует, что множество (спектр) мощностей узлов дискретен, конечен и ограничен сверху и снизу. Также и множество самих узлов дискретно и конечно. В произвольный момент t дырки будут в тех узлах, время распада которых не превышает t , т.е.

$$t_p(\rho_0(M)) < t, \quad (43)$$

или, имея в виду формулу (42)

$$A \exp\left(\frac{a^+ - f_0(\rho_0(M))b^+}{kT}\right) < t. \quad (44)$$

Решение этого неравенства относительно плотности $\rho_0(M)$ дает

$$\delta n_0(M) < \sigma_a \frac{b^+}{a^+ - kT \ln \frac{t}{A}} = g^{-1}(t). \quad (45)$$

где $\delta n_0(M) = \Omega \rho_0(M) \delta V(M)$ – количество несущих элементов в узле M . Это неравенство определяет те узлы, в которых к моменту t образовались дырки. С другой стороны, оно определяет в объеме эластической зоны множество точек M , занятых дырками, т.е. поврежденную часть зоны. Величина поврежденного объема определяется как сумма объемов дырок, которую можно записать также в виде интеграла по поврежденному объему

$$V(t) = \int_{\delta n_0(M) < g^{-1}(t)} \delta V(M). \quad (46)$$

Эта формула определяет совокупный объем, занятый дырками. Количество поврежденных несущих элементов эластической зоны в произвольный момент определяется другим интегралом

$$\bar{N}(t) = \int_{\delta n_0(M) < g^{-1}(t)} \Omega \rho_0(M) \delta V(M). \quad (47)$$

Интегралы в этих формулах – это объемные, тройные интегралы.

Как было сказано, множество узлов несущего каркаса эластической зоны дискретно и конечно, хотя и велико. Пусть полное число узлов равно $p(V_0)$, оно зависит от объема эластической зоны, увеличиваясь с ростом последнего. Каждый узел характеризуется своей мощностью. Множество значений мощности – спектр мощности, тоже дискретен и конечен, поэтому его можно упорядочить по возрастанию мощности. Получим конечную числовую последовательность мощностей узлов: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ где ρ_1 – наименьшее значение мощности, а ρ_p – наибольшее. По признаку равномощности множество всех узлов разбивается на непересекающиеся классы. К каждому отдельному классу принадлежат узлы, имеющие одинаковую мощность; класс характеризуется кратностью $\mu_k \geq 1$, равной числу узлов μ_k мощностью ρ_k . Число таких классов S не превосходит полного числа узлов, т.е. $S \leq p(V_0)$. Таким образом, каждый узел помимо мощности имеет еще и свою кратность. Сумма всех кратностей равна количеству узлов

$$\sum_{k=1}^S \mu_k = p(V_0). \quad (48)$$

Каждый узел несущего каркаса характеризуется, таким образом, четырьмя параметрами: мощностью ρ_k , объемом δV_k , временем распада t_{pk} и кратностью.

Построим функцию распределения узлов по их мощности, определив ее следующим образом:

$$F_p(\rho) = \sum_{\rho_k < \rho} \frac{\mu_k}{p(V_0)}, \quad (49)$$

где суммирование идет по всем узлам, мощность которых $\rho_k < \rho$. Функция распределения $F_p(\rho)$ по своему определению и свойствам является полным аналогом известной в математической статистике эмпирической функции распределения. Эта аналогия не случайна и впоследствии мы к этому вернемся. Продолжая аналогию, можно построить и гистограмму относительных кратностей $\frac{\mu_k}{p}$, которая тоже описывает распределение узлов по их мощности.

Время распада узла t_p является монотонно возрастающей функцией его мощности (см. формулу (42)), точнее, функцией количества несущих элементов узла $\delta n_0 = \Omega \rho_0 \delta V(\rho_0)$. Поэтому на основе возрастающей последовательности мощностей получаем возрастающую последовательность времен распада $t_{p1}, t_{p2}, \dots, t_p$. Можно построить и функцию распределения узлов по временам их распада. Определим ее соотношением

$$\Phi_p(t) = \sum_{t_{pk} \leq t} \frac{\mu_k}{p(V_0)}. \quad (50)$$

Суммирование здесь идет по всем узлам, время распада которых меньше t . При каждом значении аргумента t функция $\Phi_p(t)$ определяет относительную долю узлов с временем распада, меньшим t . Количество дырок в произвольный момент t равно числу узлов, время распада которых меньше t . Следовательно, величина $p \Phi_p(t)$ в каждый момент равна числу дырок в этот момент.

Функции распределения $F_p(\rho) \equiv F_p(\delta n)$, где $\delta n = \Omega \rho \delta V(\rho)$, и $\Phi_p(t)$ связаны друг с другом, поскольку их аргументы связаны взаимно обратными функциями.

$$t = g(\delta n) = A \exp \left(\frac{a^+ - b^+ \frac{\sigma_a}{\delta n}}{kT} \right), \quad (51)$$

$$\delta n = g^{-1}(t) = \sigma_a \frac{b^+}{a^+ - kT \ln \frac{t}{A}}.$$

Эта связь функций распределения $F_p(\rho)$ и $\Phi_p(t)$ выражается формулами

$$\begin{aligned} F_p(\rho) &= \Phi_p(g(\rho)), \\ \Phi_p(t) &= F_p(g^{-1}(t)). \end{aligned} \quad (52)$$

Функции распределения $F_p(\rho) \equiv F_p(\delta n)$ и $\Phi_p(t)$, как видно из их определения, представляют собой кусочно-постоянные

разрывные функции и являются полными аналогами эмпирических функций распределения математической статистики. С большой точностью их можно аппроксимировать непрерывными и даже гладкими функциями $F(\rho)$, $\Phi(t)$. Обе эти функции также назовем функциями распределения. Первая $F(\rho)$ описывает распределение слабых узлов по их мощности. Вторая $\Phi(t)$ описывает распределение дырок во времени, она определяет относительное количество дырок в момент времени t . Связь между этими функциями распределения такая же, как и между их дискретными аналогами $F_p(\rho)$ и $\Phi_p(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \Phi(g(\rho)), \\ \Phi(t) &= F(g^{-1}(t)). \end{aligned} \quad (53)$$

Взаимно обратные функции $g(\rho)$ и $g^{-1}(t)$ обе монотонно возрастают, поэтому их производные положительны.

Итак, число дырок в произвольный момент t равно $p(V_0)\Phi(t)$, где $p(V_0)$ – число слабых узлов несущего каркаса эластической зоны, т.е. количество «вакансий» для дырок; оно растет с увеличением объема эластической зоны. Средняя концентрация дырок, т.е. число дырок в единице объема эластической зоны, равна

$$C(t) = \frac{p(V_0)}{V_0} \Phi(t). \quad (54)$$

Она растет с течением времени. Когда концентрация дырок достигает некоторого критического значения C_k , эластическая зона уже неспособна «держать» напряжение σ_a и происходит ее коллапс, т.е. потеря ее устойчивости. Это наступает в момент t_k , который определяется из условия

$$\frac{p(V_0)}{V_0} \Phi(t_k) = C_k. \quad (54)$$

По достижении момента t_k трещина разрушения быстро «проскакивает» эластическую зону, увеличивая свой размер на длину зоны.

Процесс накопления дырок в эластической зоне описывается функцией распределения времен распада слабых узлов $\Phi(t)$, которая, в свою очередь, определяется через функцию распределения узлов по их мощности $F(\rho)$ в соответствии с формулой (53). Функцию распределения $F(\rho)$ или ее плотность $f(\rho)$ нужно выбрать из разумных физических предположений так, чтобы полученные дальнейшие результаты согласовывались с экспериментальными данными. Во-первых, плотность распре-

деления $f(\rho)$ отлична от нуля только на положительной полуоси $\rho \geq 0$; во-вторых, при $\rho=0$ она должна обращаться в ноль, т.к. узлы нулевой мощности, т.е. не содержащие несущих элементов, отсутствуют; в-третьих, при больших значениях ρ она должна достаточно быстро убывать, т.к. слишком высокомошных узлов в эластической зоне должно быть мало; в-четвертых, наибольшее количество узлов имеет некоторую «типичную» мощность, а остальные узлы группируются около этого одного или нескольких типичных значений мощности. Соответственно кривая распределения $f(\rho)$ является одно или полимодальной. Распределение, удовлетворяющее всем этим условиям – это известное в теории надежности распределение Вейбулла и различные его частные случаи. Простейшим из них является распределение Рэлея, которое мы и выбираем. Удобно будет плотность распределения Рэлея применительно к распределению узлов по мощности записать в виде

$$f(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < 0 \\ \frac{\rho}{\rho_m^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)^2\right), & \rho \geq 0, \end{cases} \quad (56)$$

где ρ_m – мода распределения. Интегральная функция $F(\rho)$ равна

$$F(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)^2\right), & \rho \geq 0. \end{cases} \quad (57)$$

Для определения текущего числа дырок обратимся к формулам (53) и (51) и получим

$$\Phi(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{2\rho_m^2} \left(\frac{b^+}{a^+ - kT \ln \frac{t}{A}}\right)^2\right). \quad (58)$$

Эта функция монотонно возрастает с течением времени от нуля до единицы и определяет относительное число дырок, т.е. долю дырок относительно общего количества слабых узлов. Для получения абсолютного числа дырок нужно умножить на число слабых узлов $p(V_0)$. Подставив функцию $\Phi(t)$ в уравнение (55) и решив его, получим время «жизни» зоны вынужденной эластичности:

$$t_k = A \exp\left(\frac{1}{kT} \left(a^+ - \frac{\sigma_a}{\rho_m} b^+ \left|\ln\left(1 - \frac{V_0}{p(V_0)} C_k\right)\right|^{-\frac{1}{2}}\right)\right). \quad (59)$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Валишин А.А., Мищенко Д.В. Особенности квазихрупкого разрушения полимеров и композитов на их основе // Вестник МИТХТ. 2010. Т. 5. № 6. С. 99–104.

2. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. 560 с.
3. Валишин А.А., Карташов Э.М., Тишаева С.Д. Статистические характеристики теплового движения в полимерах // Ученые записки МИТХТ. 2002. № 5. С. 11–18.
4. Патрикеев Г.А. Макромолекулярная механика // Механика полимеров. 1971. № 2. С. 221–231.
5. Бартенев Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров. – М.: Химия, 1984. 280 с.
6. Журков С.Н., Куксенко В.С., Петров В.А. О прогнозировании разрушения горных пород // Известия АН СССР. Физика Земли. 1977. № 6. С. 1–18.
7. Половников Г.В., Трофимов В.В. Характер акустической эмиссии и долговечность хрупких композитных материалов при постоянной нагрузке // Механика композиционных материалов. 1981. № 3. С. 542–546.
8. Осокина Д.И., Мячкин В.И., Игамназаров Т.И., Смирнов Л.А. Изучение локального поля напряжений аналога очаговой зоны (результаты моделирования) // В кн.: Физические процессы в очаге землетрясений. – М.: Наука, 1980. С. 68–78.
9. Волков С.Д. Статистическая теория прочности. – М.-Свердловск: Машгиз, 1960. 176 с.