

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С АВТОМАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТЬЮ

*А.В. Коровайцев, профессор, **Е.А. Коровайцева, старший преподаватель,
В.А. Ломовской, заведующий кафедрой

кафедра Прикладной механики и основ конструирования МИТХТ им. М.В. Ломоносова

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

**Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

e-mail: lomovskoy@phych.ac.ru

Анализируются возможные основные типы прикладных одномерных линейных краевых задач в задачах химической кинетики, прочности конструкций, аэрогидроупругости, волновых процессов в сплошных средах. Формулируется единая постановка таких задач, основанная на трех-параметрической формализации. На примере задач с произвольной топологией предлагается алгоритм решения краевых задач, альтернативный как дискретным, так и дифференциальным прогонкам. Приводятся примеры тестирования алгоритма на примере функций Крылова и задачи описания деформирования оболочки вращения в окрестности сингулярной точки.

Possible basic types of applied one-dimensional linear boundary problems in problems of chemical kinetics, structures strength, aerohydroelasticity, and wave processes in continuous media are analyzed. A uniform definition of such problems based on three-parametrical formalization is formulated. With arbitrary topology problems as an example an algorithm of boundary problems solution alternative to both discrete and differential methods is suggested. Testing the algorithm with Krylov functions as an example and the problem of describing the deformation of a shell of revolution in the vicinity of a singular point are given.

Ключевые слова: линейные краевые задачи, векторные уравнения, сопряженные уравнения, метод начальных параметров.

Key words: linear boundary problems, vector equations, adjoint equations, initial parameters method.

Современные возможности ЭВМ позволяют с помощью формализованного математического обеспечения решать самые разнообразные типы прикладных задач. Среди них особо выделяются задачи химической кинетики, отличающиеся высокой жесткостью систем уравнений, задачи прочности и аэрогидроупругости конструкций, волновых процессов в сплошных средах, у которых фундаментальные решения систем уравнений имеют как сильно выраженные экспоненциальные, так и осциллирующие компоненты. Упомянутые типы задач описываются дифференциальными, дифференциально-алгебраическими и дифференциально-интегральными системами уравнений с произвольными дискретными ограничениями, накладываемыми на искомые функции [1, 2]. Отличная от обычных в математике формализация таких систем уравнений опирается на введение в векторно-матричные соотношения вместо одного трех типов формальных векторных величин: искомые, дополнительные переменные и параметры исходных данных задач. Такая формализация позволяет в самом общем случае в трехпараметрическом пространстве информационных технологий выделить восемь основных типов прикладных одномерных линейных краевых задач. Описанный термин – пространство информационных технологий – еще не традиционен в научных исследованиях, но он объективно вызрел благодаря уникальным возможностям структурирования научной деятельности любых направлений, достигнутым благодаря свершившейся во всем мире компьютерной революции.

В наиболее общем и сложном случае при этом наряду с дифференциальными уравнениями, записанными в векторно-матричной форме, выделяются три типа дискретных соотношений, замыкающих задачу описания состояния элементов расчетной модели любой линейной прикладной задачи: граничные условия, условия неразрывности обобщенных векторов, составленных из искомым векторов, и условий совместности состояния внутренних элементов расчетной модели. Состав всех формализованных величин определяется конкретикой прикладной задачи. Например, в задачах прочности искомые переменные состоят из подвекторов обобщенных перемещений и внутренних усилий. Дополнительные переменные связаны с величинами, не входящими под знак производной, но используемыми при анализе состояния элементов расчетной модели, например, напряжений при анализе напряженного состояния или деформаций при анализе деформированного состояния деформируемых элементов. Параметры исходных данных появляются в любом случае, даже при использовании критерияльного масштабирования заданных исходных размерных величин, описывающих геометрию элементов или свойства и модель материалов элементов [3]. Соответственно в пространстве информационных технологий дискретные соотношения, замыкающие задачу описания состояния элементов расчетной модели, могут иметь в наиболее общем случае вид восьми случаев формы условий, состоящих из смешанных и неоднородных граничных условий, условий не-

разрывности обобщенных перемещений конструкции и условий равновесия внутренних узлов топологической схемы конструкции.

Описанная обобщенная расчетная модель прикладной краевой задачи позволяет для любой задачи использовать понятие расчетного элемента модели как элемента, для которого выполнены условия Липшица, и использовать по усмотрению вычислителя любые рациональные для вычислений локальные системы координат при описании каждого из элементов модели. В общем случае такие элементы понимаются в терминах метода конечных элементов как суперэлементы. Вопросы дискретизации суперэлементов при выполнении условий существования решений краевых задач на втором плане приводят к появлению вопросов, связанных с получением этих решений и, в частности, вопросов точности получаемых, как правило, на ЭВМ решений, обусловленности задач и сходимости алгоритмов решения к точному решению краевых задач. Полного ответа на эти вопросы обычно найти не удастся. Надежды обеспечения различными как явными, так и неявными «точными» методами численного интегрирования систем дифференциальных уравнений адекватного решения плохо обусловленных краевых задач оказались иллюзорны при использовании функций в общепринятом в вычислительной математике и механике смысле [4, 5]. Наибольшие продвижения в ответах на эти вопросы возможны только при привлечении аппарата теории автоматического регулирования к процессу получения решения задач на ЭВМ с описанием взаимосвязи уравнений исходных систем дифференциальных уравнений графом. Но при постановках контроля такого рода за получением решения исходных задач он превращается в самостоятельную задачу, не имеющую прямого отношения к решаемой краевой задаче и тем более к ее прикладному назначению.

При реализации конечно-элементной идеологии для одномерных линейных краевых задач использование сеточных генераторов зачастую оказывается направленным только на уменьшение ширины ленты матрицы разрешающей системы линейных алгебраических уравнений с позиций волонтаристских критериев, то есть в любом случае на решение чисто вычислительных проблем линейной алгебры, но не на обеспечение точности решения исходной плохо обусловленной задачи. Поэтому вопрос автоматического обеспечения точности решения прикладных линейных краевых задач актуален. При

его решении, адекватном обусловленности и необходимой вычислительной точности решения задачи, вопросы «заклинивания» каких-либо компонент состояния объектов модели не возникают как таковые, поскольку обеспечение точности решений на уровне машинного нуля во многом уже решены с помощью аппарата теории решетчатых функций [6].

Из возможных типов канонических форм прикладных краевых задач без ограничения общности ради краткости используем форму многоточечных разветвленных локально хорошо обусловленных краевых задач без дополнительных соотношений. Считаем, что ЭВМ контролирует обусловленность любой из локальных задач, обеспечивая ее сеточной методикой автоматического разбиения любого из суперэлементов на элементы. Математическая формализация краевой задачи для системы суперэлементов, разбитой на элементы, при этом не изменяется. Считаем, что с помощью ЭВМ в случае необходимости при обеспечении заданной точности решения задачи изменяется лишь число условий неразрывности обобщенных векторов, составленных из искомым векторов, и условий совместности состояния внутренних элементов расчетной модели.

Для исходной задачи из N суперэлементов краевые задачи образуются системами обыкновенных дифференциальных уравнений относительно векторов разрешающих переменных $y_i(x_i, \mu_i)$ размерности m

$$\frac{dy_i}{dx_i} = A_i(x_i, \mu_i)y_i + a_i(x_i, \mu_i); \quad i \in [1, N]. \quad (1)$$

Здесь A_i – квадратные матрицы порядка m , векторы a_i описывают нагружение деформируемых элементов распределенными нагрузками, а μ_i – векторы параметров задачи.

Условия совместности деформирования суперэлементов описываются тремя типами соотношений:

- граничными условиями

$$B_j(x_{j,H}, \mu_{j,H})y_{j,H} + b_j(x_{j,H}, \mu_{j,H}) = 0; \quad (2)$$

- условиями неразрывности обобщенных перемещений

$$\begin{aligned} D_j(x_{j,H})y_{j,H} + D_m(x_{m,K})y_{m,K} &= 0; \\ D_j(x_{j,H})y_{j,H} + D_m(x_{m,H})y_{m,H} &= 0; \\ D_j(x_{j,K})y_{j,K} + D_m(x_{m,K})y_{m,K} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

- условиями равновесия внутренних узлов конструкции

$$\sum_{m=1}^l D_m(x_{m,H})y_{m,H} + \sum_{n=1}^p D_n(x_{n,K})y_{n,K} + C_q(x_q)a_q(x_q, \mu_q) = 0. \quad (4)$$

Здесь значения индексов j, m, l, p, q определяются топологией конкретной краевой задачи, индексы H и K связаны с началом и концом локальных систем координат суперэлементов, а матричные и векторные коэффициенты определяются конкретикой используемых уравнений и условий совместности деформирования суперэлементов в конструкции.

В соотношениях замкнутой линейной краевой задачи (1-4) для использования суперэлементного подхода обобщенные усилия и перемещения в составе векторов разрешающих переменных разделены на соответствующие блочные согласованные в энергетическом смысле компоненты. Основой решения краевой задачи является построение в локальных системах ко-

ординат суперэлементов нормированных интегральных матриц с помощью метода начальных параметров [7]. При этом в простейшем случае искомые векторы $y_i(x)$ представляются, например, с использованием значений искомых векторов перехода от краевой задачи к задаче Коши на левой границе отрезка интегрирования, в следующем виде:

$$y_i(x_i, \mu_i) = M_i(x_i, \mu_i) y_{H,i}(\mu_i) + H_i(x_i, \mu_i). \quad (5)$$

В этом представлении матричные M_i и векторные H_i функции являются решениями задач Коши (штрих соответствует производной по локальной координате X_i , E – единичная матрица):

$$M'_i(x_i, \mu_i) = A_i(x_i, \mu_i) M_i(x_i, \mu_i), M_i(x_{i,H}) = E; \quad (6)$$

$$H'_i(x_i, \mu_i) = A_i(x_i, \mu_i) H_i(x_i, \mu_i) + b_i(x_i, \mu_i), H(x_{i,H}) = 0. \quad (7)$$

Отметим, что построенные таким образом векторы $y_i(x_i, \mu_i)$ удовлетворяют системе уравнений (1). При этом матрицы M_i являются нормированными интегральными матрицами [8] системы уравнений (1).

Подстановка векторов (5) в условия совместности деформирования суперэлементов (2-4) приводит к разрешающей краевую задачу (1-5) системе линейных алгебраических уравнений относительно векторов $y_{i,H}$, блочная структура которой определяется только конкретикой условий совместности деформирования.

Такой подход применим для решения только хорошо обусловленных исходных краевых задач, когда в обеспечении заданной точности решения задачи нет никакой необходимости. При расчете же высокоскоростных процессов химической кинетики или состояния тонкостенных конструкций приходится особое внимание уделять точности расчета матричных M_i и векторных H_i функции. Обычно при этом используют различные формы прогонок, например, Абрамова, Годунова или Бидермана [7]. В своей основе все варианты используемых прогонок основаны на различного рода линейных или нелинейных преобразованиях в процессе расчета интегральных характеристик систем дифференциальных уравнений. При этом по сути ошибки численного интегрирования систем дифференциальных уравнений в каждом из вариантов по-своему усредняются, но не устраняются, а предложения использования прогонок на каждом шаге численного интегрирования лишь в предельном смысле загоняют проблему в тупик. Кроме того, создание автоматического обеспечения точности решения прикладных линейных краевых задач построения конечно-элементной сетки невозможно, так как в общем случае нахождение необходимого значения ло-

кальных координат теоремы усреднения также невозможно без точного знания искомых векторных функций $y_i(x, \mu_i)$.

Для устранения упомянутых проблем численного интегрирования исходных систем дифференциальных уравнений и перевода краевой задачи к расширенной форме с автоматически определяемым числом условий неразрывности обобщенных векторов, составленных из искомых векторов, и условий совместности состояния внутренних элементов расчетной модели используется метод сегментации [9]. В своей изначальной постановке этот метод также не содержит никакой возможности автоматизации расчетов. Поэтому вместо традиционных подходов к контролю процесса решения линейных краевых задач предлагается интегральный подход, основанный на строгом математическом равенстве, всегда выполняемом для линейных систем дифференциальных уравнений.

В теории дифференциальных уравнений при изучении свойств решений однородных уравнений, наряду с исходными системами, используются сопряженные системы линейных дифференциальных уравнений

$$L'_i(x_i, \mu_i) = -A_i^T(x_i, \mu_i) L_i(x_i, \mu_i). \quad (8)$$

Строго доказано [8], что если в начальной точке расчета нормированных интегральных матриц систем (6), (8) выполнено условие их ортогональности

$$M_i^T(x_i, \mu_i) \cdot L_i(x_i, \mu_i) = E, \quad (9)$$

то оно должно быть выполнено и при любом значении аргумента интегрирования систем (6), (8). Основываясь на этом факте ортогональности нормированных интегральных матриц систем, предлагается вместо обычных трудоемких и малоэффективных средств контроля за решением краевой задачи использовать для контроля за решением краевой задачи посто-

янный текущий контроль неортогональности нормированных интегральных матриц $\mathbf{M}_i(x_i, \mu_i)$ и $\mathbf{L}_i(x_i, \mu_i)$. В качестве условия принятия решения исходной системы уравнений за достаточно точное можно использовать заданную малость нормы произведения интегральных матриц. В качестве условия принятия решения исходной системы уравнений (1) за достаточно точное можно использовать неравенство

$$|\mathbf{M}_i^T(x_j, \mu_i) \cdot \mathbf{L}_i(x_j, \mu_i) - \mathbf{E}| \leq \delta, \quad (10)$$

где δ – принятое допустимое значение неортогональности нормированных интегральных матриц.

При тестировании предлагаемого алгоритма на начальном этапе были использованы обычные уравнения статического деформирования кольца и оболочек канонических форм: цилиндрической, конической и сферической [2]. Особое внимание при подготовке к практическому использованию алгоритма уделено задачам модального анализа в связи с ориентацией алгоритма в первую очередь на задачи динамики кварцевых генераторов [10]. Актуальная потребность дальнейшего прогресса в различных областях техники связана, наряду с экспериментальными работами в области создания нового поколения кварцевых генераторов, с принципиальной их поддержкой теоретическими работами, обеспечивающими точность расчета частот собственных колебаний не ниже двенадцати десятичных знаков до десятой формы колебаний включительно для элементов с заданными начальными несовершенствами параметров их сечений. В качестве простейшей модели материала при таком тестировании рассмотрена изотропная модель. При препроцессорном контроле обусловленности решаемых соответствующих краевых задач использована автоматическая генерация конечно-элементной сетки со значениями $\delta = 0.01$, что позволило добиться желаемых результатов.

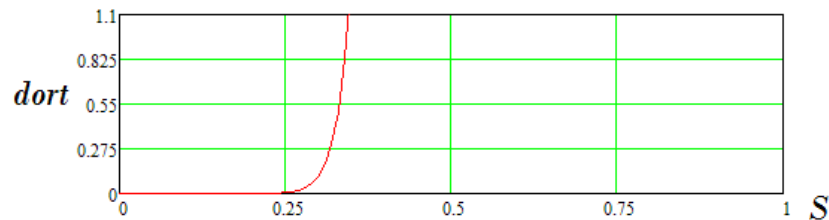


Рис. 2. Относительное изменение ортогональности нормированных интегральных матриц для полукольца.

Для исключения отмеченных проблем разработан алгоритм решения краевых задач с заданной точностью. Для иллюстрации работы

В качестве иллюстрации проблем, возникающих при обычных постановках, использована матрица коэффициентов дифференциальных уравнений, приводящая к функциям Крылова [2]

$$\dot{\mathbf{A}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 \cdot \beta^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

где β – показатель изменяемости функций.

На рис. 1 показано относительное изменение ортогональности нормированных интегральных матриц систем дифференциальных уравнений $|\mathbf{M}^T \mathbf{L}|$ по аргументу функций при $\beta = 20$. Очевидно, уже при $x > 0.1$ нельзя корректно проиллюстрировать даже аналитические функции. Тем не менее вычислители «ничтоже сумняшеся» предлагают не обращать на такие факты никакого внимания и «смело» использовать различные специальные приемы [4, 5, 11]. Эвристичность их и расчет «на авось» очевидна.

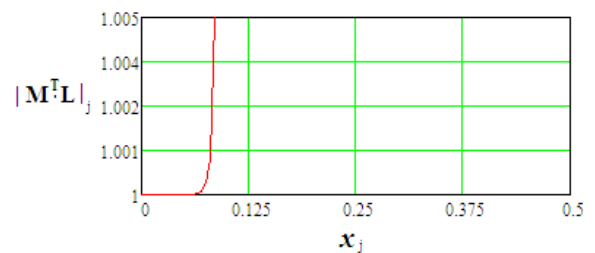


Рис. 1. Изменение ортогональности нормированных интегральных матриц для функций Крылова.

На рис. 2 показано относительное изменение ортогональности $dort(S) = |\mathbf{M}^T \mathbf{L} - \mathbf{E}|$ нормированных интегральных матриц, аналогичное представленному изменению на рис. 1, для заземленного полукольца с относительной высотой квадратного сечения, в 25 раз меньшей радиуса.

сеточного генератора этого алгоритма на рис. 3 показан обычный кадр его работы при проведении расчетов по программе в системе Matlab.

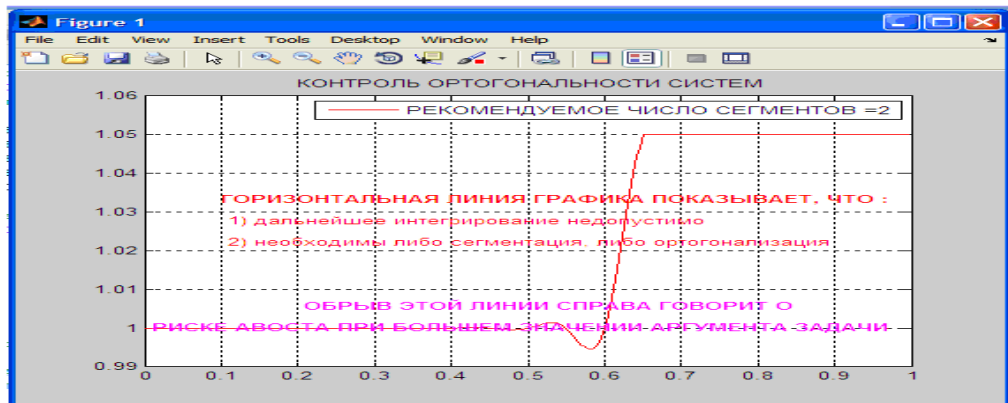


Рис. 3. Кадр работы сеточного генератора.

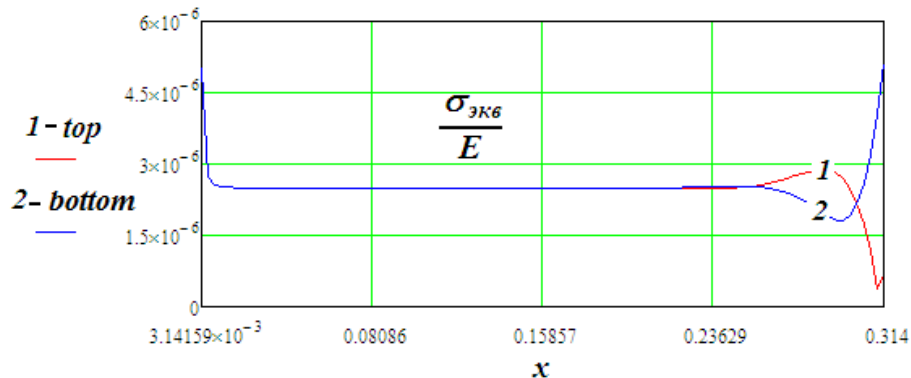


Рис. 4. Изменение эквивалентных напряжений на лицевых поверхностях полусферы.

Для иллюстрации новых возможностей уточнения расчетов рассмотрена задача о нагружении тонкой полусферы равномерным внешним давлением при нагрузках, не приводящих к потере устойчивости. В этой задаче в свое время много внимания было уделено обходу сингулярности полюса. Разработано множество предложений. Но ни одно из них не оказалось способным выявить эту сингулярность расчетами, она просто «не замечалась» численными методами, что «устраивало» всех вычислителей,

несмотря на принципиальность этого вопроса. Оправдание такого положения «техническими приложениями» и принципом Сен-Венана является, по мнению авторов, лишь самооправданием слабости. На рис. 4 показано изменение эквивалентных напряжений на лицевых поверхностях полусферы с толщиной, в 100 раз меньшей радиуса заземленной полусферы, вычисленное по предложениям настоящей работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-08-00504-а).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Канторович З.Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. – М.: Машиностроение, 1960. 744 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И.А. Биргера. – М.: Машиностроение, 1968. 1800 с.
3. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
4. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. 512 с.
5. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. 685 с.
6. Горшков А.А., Коровайцева Е.А. О решении задачи Коши с помощью решетчатых функций в математической физике и химической кинетике // Вестник МИТХТ. 2009. Т. 4. № 3. С. 22–26.
7. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. 576 с.
9. Калнинс А., Лестинги Дж. К нелинейной теории упругих оболочек вращения // Прикладная механика. Сер. Е. 1967. № 1. С. 69–76.
10. Gouskov A.M., Korovaytseva E.A., Panovko G.Y. Quartz oscillator nonlinear dynamics // Abstracts of the 7th Eur. Nonlinear Dynamics Conf. – Rome, Italia, 24-29 July 2011. P. 99–100.
11. Кирьянов Д.В. Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 528 с.