

ТЕПЛОВАЯ РЕАКЦИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛООБМЕНОМ НА ОДНОЙ ИЗ ГРАНИЦ

И.А. Джемесюк, доцент, Ф.В. Пономарев, студент

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В.Ломоносова,

Москва, 119571 Россия

e-mail: filpon@mail.ru

В работе дается решение краевой задачи нестационарной теплопроводности для бесконечной пластины с заданным теплообменом на одной из ее границ. Задача решена методом интегральных преобразований. Получено аналитическое решение; построены графики, характеризующие данный процесс для различных сред.

Ключевые слова: теплообмен, математическое моделирование, интегральное преобразование Фурье, таблицы Карташова, критерий Био, критерий Фурье.

Метод интегральных преобразований нашел широкое распространение при решении уравнения теплопроводности в конечных и бесконечных областях классического типа: бесконечные пластины, длинный тонкий однородный стержень и т.д. Он позволяет получать аналитические решения тепловых задач по стандартной схеме. Применим его для решения следующей задачи, представляющей интерес в технических приложениях.

Пусть в начальный момент времени распределение температуры по толщине пластины равно $T(x, t)|_{t=0} = T_0 + \Delta T \frac{x}{l}$. Левая граница под-

держивается при постоянной температуре T_0 , а на правой границе $x = l$ задан теплообмен со средой по закону Ньютона-Рихмана

$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha(T_0 - T|_{x=l})$. Найдем закон распре-

деления температуры по толщине пластины и ее зависимость от скорости теплообмена со средой.

Запишем математическую постановку данной задачи [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; & 0 < x < l; t > 0; \\ T|_{t=0} = T_0 + \Delta T \frac{x}{l}; & 0 \leq x \leq l; \\ T|_{x=0} = T_0; & t > 0; \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha(T_0 - T|_{x=l}); & t > 0; \end{cases} \quad (1)$$

которая в безразмерных переменных $z = \frac{x}{l}$, $Fo = \frac{at}{l^2}$ (критерий Фурье), $W(z, Fo) = \frac{T - T_0}{\Delta T}$,

$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} l = hl$ (критерий Био) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}; & 0 < z < 1; Fo > 0; \\ W|_{Fo=0} = z; & 0 \leq z \leq 1; \\ W|_{z=0} = 0; & Fo > 0; \\ \left(\frac{\partial W}{\partial z} + Bi W \right) \Big|_{z=1} = 0; & Fo > 0; \end{cases} \quad (2)$$

Для решения этой краевой задачи типа 1.3 воспользуемся интегральным преобразованием Фурье. Необходимые формулы выпишем из таблиц Э.М. Карташова [2]:

$$\bar{f}(\mu_n) = \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) dx, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \rightarrow (f'(l) + hf(l)) \sin \mu_n + \frac{\mu_n}{l} f(0) - \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 \bar{f}(\mu_n), \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + h^2 l^2) \sin \frac{\mu_n x}{l} \bar{f}(\mu_n)}{\mu_n^2 + h^2 l^2 + hl}, \quad (5)$$

где $\mu_n > 0$ – корни уравнения $\text{ctg} \mu = -\frac{hl}{\mu}$. В

нашем случае, с учетом граничных условий, формулы (3), (5) преобразуются следующим образом:

$$\bar{W}_n(Fo) = \int_0^1 W(z, Fo) \sin(z \mu_n) dz, \quad (6)$$

$$W(z, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + Bi^2) \sin(\mu_n z) \bar{W}_n(Fo)}{\mu_n^2 + Bi^2 + Bi}, \quad (7)$$

где $\mu_n > 0$ – корни уравнения

$$\text{ctg} \mu = -\frac{Bi}{\mu}. \quad (8)$$

Согласно методу интегральных преобразований, задача (2), с учетом (4), перейдет в

обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с заданным начальным условием (задача Коши):

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial Fo} = -\mu_n^2 \cdot \bar{W}_n(Fo) \\ \bar{W}_n(Fo)|_{Fo=0} = \int_0^1 z \cdot \sin(\mu_n z) dz \end{cases} \quad (9)$$

решением которой, как легко показать, является функция

$$\bar{W}_n(Fo) = \bar{W}_n|_{Fo=0} \cdot e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (10)$$

Проинтегрировав по частям интеграл в (9), найдем интегральное преобразование начального условия:

$$\begin{aligned} \bar{W}_n|_{Fo=0} &= \int_0^1 z \cdot \sin(\mu_n z) dz = -\frac{1}{\mu_n} \int_0^1 z \cdot d \cos(\mu_n z) = -\frac{1}{\mu_n} \left(z \cdot \cos(\mu_n z) \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\mu_n z) dz \right) = \\ &= -\frac{1}{\mu_n} \left(\cos \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \sin(\mu_n z) \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{\mu_n} \left(\cos \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n \right). \end{aligned}$$

так как $\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$, а $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$, то, с учетом (8), получим что $\cos \mu_n = -\frac{Bi}{\sqrt{\mu_n^2 + Bi^2}}$,

а $\sin \mu_n = \frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n^2 + Bi^2}}$, тогда $\bar{W}_n|_{Fo=0} = -\frac{1}{\mu_n} \left(\cos \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n \right) = \frac{Bi+1}{\mu_n \sqrt{\mu_n^2 + Bi^2}}$ и, согласно (10),

имеем:

$$\bar{W}_n(Fo) = \frac{Bi+1}{\mu_n \sqrt{\mu_n^2 + Bi^2}} \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (11)$$

Мы решили задачу в пространстве изображений; подставляем это решение в формулу обращения (7) и получаем искомое решение задачи:

$$W(z, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + Bi^2)}{\mu_n^2 + Bi^2 + Bi} \cdot \frac{Bi+1}{\mu_n \sqrt{\mu_n^2 + Bi^2}} \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \cdot \sin(\mu_n z) \quad (12)$$

Так как ряд (12) с ростом n быстро убывает, то для анализа полученного решения и построения графиков достаточно взять два члена ряда

$$\begin{aligned} W(z, Fo) \approx & 2 \frac{(\mu_1^2 + Bi^2)}{\mu_1^2 + Bi^2 + Bi} \cdot \frac{Bi+1}{\mu_1 \sqrt{\mu_1^2 + Bi^2}} \cdot e^{-\mu_1^2 Fo} \cdot \sin(\mu_1 z) + \\ & + \frac{(\mu_2^2 + Bi^2)}{\mu_2^2 + Bi^2 + Bi} \cdot \frac{Bi+1}{\mu_2 \sqrt{\mu_2^2 + Bi^2}} \cdot e^{-\mu_2^2 Fo} \cdot \sin(\mu_2 z) \end{aligned} \quad (13)$$

В вычислительной среде Mathcad было построено 70 графиков зависимости $W(z; Fo)$ при различных Bi , различных Fo и безразмерной длине z ($z \in [0; 1]$). Вид некоторых из них представлен на рис. 1.

Общие выводы

1) С ростом критерия Фурье (с увеличением времени) температура в пластине выравнивается.

2) При малых критерия Би безразмерная температура возрастает по толщине пластины, достигая наибольшего значения на правой границе.

3) По мере увеличения критерия Би (уже при $Bi = 2$) задача теплообмена со средой приближается к первой краевой задаче – температурному нагреву правой границы.

Замечание

Интересно сравнить решение полученной задачи 1.3 — теплообмена со средой, с решением задачи 1.1. — температурным нагревом правой границы.

В безразмерных переменных задача 1.1 имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}; & 0 < z < 1; Fo > 0; \\ W|_{Fo=0} = z; & 0 \leq z \leq 1; \\ W|_{z=0} = 0; & Fo > 0; \\ W|_{z=1} = 0; & Fo > 0; \end{cases} \quad (14)$$

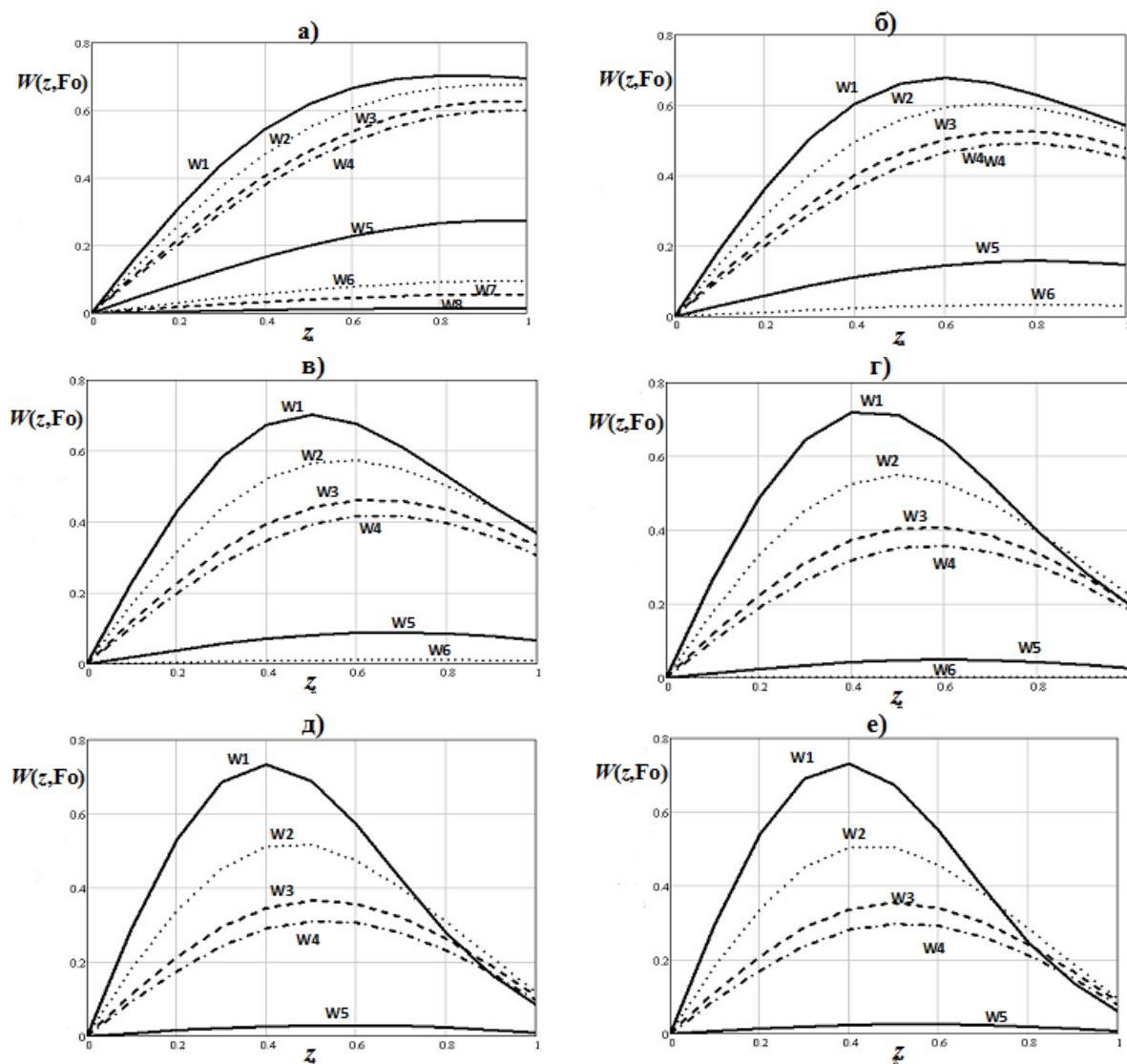


Рис. 1. График зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от z при фиксированных значениях Fo ($W1 = W(z, 0.01)$; $W2 = W(z, 0.04)$; $W3 = W(z, 0.08)$; $W4 = W(z, 0.1)$; $W5 = W(z, 0.4)$; $W6 = W(z, 0.8)$; $W7 = W(z, 1)$; $W8 = W(z, 1.5)$) для различных значений критерия Био: а) $Bi = 0.1$; б) $Bi = 0.8$; в) $Bi = 2$; г) $Bi = 4$; д) $Bi = 8$; е) $Bi = 10$.

Ее решение можно также найти при помощи интегрального преобразования Фурье. Для решения задачи используем формулы из таблиц Карташова, соответствующие задаче 1.1. В частности, интегральное преобразование и формула обращения имеют вид:

$$\bar{W}_n(Fo) = \int_0^1 W(z, Fo) \sin(n\pi z) dz, \quad (15)$$

$$W(z, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi z) \bar{W}_n(Fo),$$

Процесс решения данной задачи аналогичен вышеприведенному решению задачи 1.3. Решив задачу в пространстве изображений, необходимо подставить в решение формулу обращения (15). Тогда получаем искомое решение задачи 1.1:

$$W(z, Fo) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 Fo} \sin(n\pi z) \quad (16)$$

Так как ряд (16) с ростом n быстро убывает, то для анализа полученного решения и построения графиков также достаточно взять два члена ряда

$$W(z, Fo) \approx \frac{2}{\pi} e^{-\pi^2 Fo} \sin(\pi z) - \frac{1}{\pi} e^{-4\pi^2 Fo} \sin(2\pi z). \quad (17)$$

В данном случае в вычислительной среде Mathcad было построено 8 графиков зависимости $W(z, Fo)$ при различных Фурье и безразмерной длине z ($z \in [0; 1]$). Вид некоторых из этих графиков представлен на рис. 2.

Стоит отметить, что графики наглядно иллюстрируют приведенное выше утверждение о том, что по мере увеличения критерия Био задача теплообмена со средой приближается к первой краевой задаче.

Данные задачи могут иметь прикладное значение для подробного изучения температурных функций и оптимизации технологических процессов на производстве.

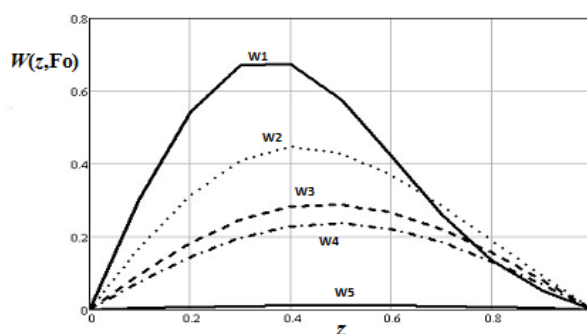


Рис. 2. График зависимости безразмерной температуры $W(z, Fo)$ от z при фиксированных значениях Fo ($W1 = W(z, 0.01)$; $W2 = W(z, 0.04)$; $W3 = W(z, 0.08)$; $W4 = W(z, 0.1)$; $W5 = W(z, 0.4)$) для температурного нагрева правой границы (задача 1.1).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Джемесюк И.А., Рубин А.Г., Карташов Э.М. Краткий курс математического моделирования физико-химических процессов. – М.: МИТХТ, 2012. 56 с.
2. Джемесюк И.А., Карташов Э.М., Ожерелкова Л.М. Математическое моделирование физико-химических процессов. Часть 2. – М.: МИТХТ, 2008. 56 с.

THERMAL REACTION OF AN INFINITE PLATE WITH HEAT EXCHANGE ON ONE OF THE BOUNDARIES

I.A. Dzhemesyuk, F.V. Ponomarev[@]

M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 117571 Russia

[@]*Corresponding author e-mail: filpon@mail.ru*

Boundary value problem of transient heat conduction for unlimited bar with given heat exchange at one of its boundaries is considered. The problem is solved with the method of integral transformations. Analytical solution is obtained; graphs characterising the process for different media are constructed.

Key words: *heat transfer, mathematical model, Fourier integral transform, Kartashov's tables, Fourier criterion, Biot criterion.*