

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЕ ЛЕЙБЕНЗОНА В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Б.В. Алексеев[@], заведующий кафедрой

Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий)
Кафедра физики, Москва, 119571 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: boris.vlad.alexeev@gmail.com

Получено аналитическое решение нелинейного уравнения Лейбензона в теории фильтрации. Найдено аналитическое решение уравнения в частных производных представлено в явной алгебраической форме. Приведены интегральные поверхности в трехмерном изображении.

Ключевые слова: уравнение Лейбензона, теория фильтрации.

ANALYTIC SOLUTION OF NONLINEAR LEYBENSON EQUATION IN THE THEORY OF FILTRATION

B.V. Alexeev[@]

Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies),
Moscow, 119571 Russia

[@] Corresponding author e-mail: boris.vlad.alexeev@gmail.com

Analytic solution of nonlinear Leybenson equation in the theory of filtration is obtained. Analytical solutions of the partial differential equations are presented in the explicit algebraic form. The integral surfaces in three dimensions are presented.

Keywords: Leybenson equation, theory of filtration.

Введение

Теория фильтрации – раздел гидродинамики, посвященный исследованию движения жидкостей через пористые среды, то есть через среды, пронизанные системой сообщающихся между собой пустот. Движение жидкости при фильтрации принято рассматривать как некий эффективный сплошной поток. Поэтому фильтрационные потоки формально имеют сходство с потоками в трубах и каналах, а термины теории фильтрации во многом совпадают с гидравлической терминологией. Тем не менее, напомним некоторые определения в теории фильтрации.

Упомянутые пористые среды называют фильтрующими или проницаемыми. Примерами фильтрующих сред могут служить некоторые грунты (пески, суглинки), строительные материалы (щебень, пористый бетон, кирпичная кладка). Проницаемость пористой среды определяют опытным путём. Водупором называют грунт, практически не пропускающий воду. Глины часто являются водупорными, так как поры в них замкнутые и малого размера.

Непроницаемый же строительный материал принято именовать гидроизоляционным (а не водупорным). Теория фильтрации применительно к строительству, водоснабжению и водоотведению рассматривает закономерности фильтрации воды с целью проведения количественных расчётов, например, при проектировании дренажных систем (дренажей), понижающих уровень грунтовых вод для защиты подземных сооружений и помещений зданий от подтопления. Особую роль в экологии играет движение влаги в почве. Движение почвенной влаги, правильная организация орошения и ирригации – одна из важнейших задач теории фильтрации. Методы теории фильтрации используют при решении проблемы охраны грунтовых вод от загрязнения отходами производства, удобрениями и прочими продуктами жизнедеятельности человечества. Основные источники энергии XX века – нефть и газ добываются из глубоко залегающих подземных пластов. Накопление нефти и газа в этих пористых пластах-коллекторах и основные технологии извлечения (добычи) управляются законами теории фильтрации.

Важнейшей количественной характеристикой пористых тел является их пористость ε , определяемая как доля объема тела, приходящаяся на поры, или объем пор в единице объема материала. Обычно при этом игнорируются замкнутые изолированные поры и учитываются только соединенные между собой проточные поры. Они образуют поровое пространство – сложную разветвленную и нерегулярную сеть пор. Пористость большинства материалов находится в пределах 0.1–0.4. Способность пористой среды пропускать жидкость характеризуется проницаемостью. Ее определение тесно связано с основным законом движения жидкости в пористой среде, называемом законом Дарси в честь французского инженера Анри Дарси, экспериментально установившего этот закон в 1856 году. В механике сплошных сред при изучении течений жидкостей и газов в пористой среде в гравитационном поле применяется дифференциальная форма закона Дарси

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}(\rho g z + p), \quad (1.1)$$

где p – внешнее давление, ρ – плотность флюида, μ – его динамическая вязкость, g – ускорение свободного падения, z – вертикальная координата. В уравнении (1.1) k – коэффициент пропорциональности, являющийся характеристикой пористой среды и не зависящий от размеров образца и свойств жидкости. Закон Дарси справедлив при медленном течении жидкости, т.е. при малых числах Рейнольдса. В теории движения грунтовых вод имеют дело только с водой, вязкость которой $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ и плотность $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Классическая теория фильтрации, о которой шла речь до сих пор, имеет дело с течением однородной жидкости в пористой среде. В большинстве современных приложений, однако, приходится рассматривать неоднородные системы, многокомпонентные многофазные смеси. Упомянем лишь такие области приложения теории фильтрации, как загрязнение грунтовых вод, миграция влаги в почвенном слое и вытеснение неф-

ти пластовой или искусственно закачиваемой водой или газом (см. [15]).

Основы теории движения газа в пористой среде были разработаны основателем советской школы нефтегазовой гидромеханики Л.С. Лейбензоном. Он впервые получил дифференциальные уравнения не установившейся фильтрации совершенного газа в пласте по закону Дарси. Полученное им нелинейное дифференциальное уравнение впоследствии было названо уравнением Лейбензона. В отличие от гиперболического уравнения Буссинеска, уравнение Лейбензона принадлежит к параболическому типу. При выводе указанного уравнения предполагалось, что коэффициенты пористости и проницаемости не изменяются с давлением (пласт не деформируется), вязкость газа также не зависит от давления, газ совершенный. Обычно принимается также, что фильтрация газа в пласте происходит по изотермическому закону, т.е. температура газа и пласта остается неизменной по времени.

В простейшем варианте одномерная нестационарная теория фильтрации приводит к следующему нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{2\mu\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2. \quad (1.2)$$

Обычно зависимую переменную h называют высотой положения. В отечественной литературе уравнение (1.2) известно также как частный случай уравнения Лейбензона. Уравнение (1.2) появляется, например, в теории нестационарной одномерной фильтрации почвенных вод, соседствующих с некоторым прямоугольным резервуаром, имеющим в начальный момент времени высоту уровня воды $h = h_{\max}$ [3]. Проницаемая боковая поверхность резервуара служит источником движения воды, распространяющейся вдоль направления x (см. рис. 1). Приведем кратко вывод уравнения Лейбензона, что позволит одновременно выяснить предположения, при которых оно было получено.

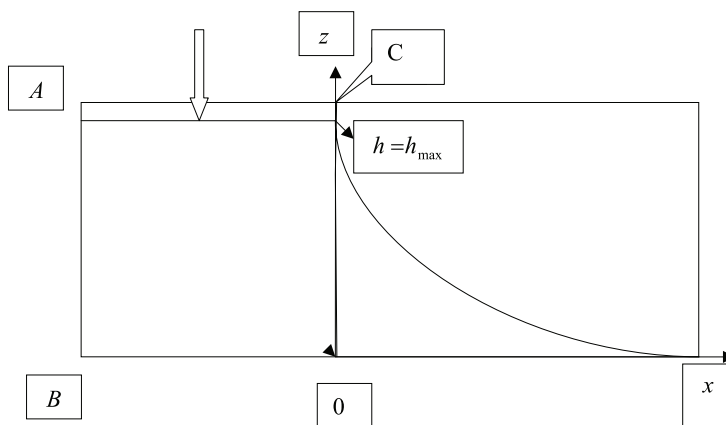


Рис. 1. Иллюстрация к выводу одномерного нестационарного уравнения Лейбензона.

Пусть жидкость, содержащаяся в резервуаре АВ0С инфильтруется в почву в направлении 0х. Движение жидкости считается одномерным, с этой целью предполагается, что элементы АВ, В0х являются непроницаемыми для жидкости. Это означает, используя принятую терминологию, что рассматривается одномерный нестационарный безнапорный грунтовой поток при горизонтальном водоупоре. Аналогичное предположение широко используется в теории радиального движения газа к скважине.

Пренебрегая влиянием инерционных членов при движении жидкости вдоль оси z, имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует $p + \rho g z = \text{const}$ и при $z = 0$ находим $p = \rho g h$. Иначе

$$p + \rho g z = \rho g h, \quad (1.4)$$

и закон Дарси переписывается в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}(\rho g h). \quad (1.5)$$

Вводим контрольный объем $(x, x + dx) \times 1 \times (0, h)$ в виде вертикального прямоугольного параллелепипеда высотой h и площадью основания $(1 \times dx)$. Для направления x имеем скорость $u_x = -\frac{k}{\mu} \rho g \frac{\partial h}{\partial x}$ и поток массы через боковую поверхность упомянутого параллелепипеда

$$q_x = \rho u_x h = -\frac{k}{\mu} \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{k g}{2 \mu} \rho^2 \frac{\partial}{\partial x} h^2. \quad (1.6)$$

За единицу времени в параллелепипед поступает масса жидкости q_x и вытекает $q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$. Для контрольного объема, содержащего несжимаемую жидкость, записываем отнесенный к единице времени баланс массы.

$$\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} \rho = \frac{\partial q_x}{\partial x}, \quad (1.7)$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{k g \rho}{2 \mu \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) есть нелинейное одномерное

нестационарное уравнение Лейбензона, записанное выше в форме (1.2).

Уравнение Лейбензона и его аналитическое решение

В простейшем варианте одномерная нестационарная теория фильтрации приводит к следующему нелинейному дифференциальному уравнению (см. (1.2)):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{2 \mu \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2, \quad (2.1)$$

или

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu \varepsilon} \left[h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.2)$$

Приведем уравнение (2.2) к безразмерному виду, используя в качестве масштаба $h = h_{\max}$, то есть $\tilde{h} = h / h_{\max}$, $\tilde{x} = x / h_{\max}$. При этом

$$\tilde{t} = t \frac{\rho g k}{\mu \varepsilon h_{\max}} \quad (2.3)$$

и уравнение (2.2) приводится к безразмерной форме

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right)^2. \quad (2.4)$$

Далее для простоты записи мы опускаем знак тильда при преобразованиях уравнения (2.4). Будем искать решение (2.4) в форме трехчленного полинома с коэффициентами, зависящими только от времени. Имеем

$$h(x, t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t). \quad (2.5)$$

В этом случае

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} x^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} x + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x\varphi(t) + \psi(t), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2\varphi(t). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) – (2.8) в соотношение (2.5), находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} x^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} x + \frac{\partial \chi}{\partial t} = 2\varphi(t)(\varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)) + (2x\varphi(t) + \psi(t))^2 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} x^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} x + \frac{\partial \chi}{\partial t} = 6\varphi^2(t)x^2 + 6\varphi(t)\psi(t)x + 2\varphi(t)\chi(t) + \psi^2(t) \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) есть тождество, справедливое при всех значениях x . Это возможно лишь при условиях

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 6\varphi^2, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 6\varphi\psi, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 2\varphi\chi + \psi^2. \quad (2.13)$$

Обратимся к решению системы уравнений (2.11) – (2.13). Уравнение (2.11) есть уравнение Бернулли, которое легко интегрируется с использованием подстановки $w = 1/\varphi$

$$w' = -6$$

или

$$\varphi = -\frac{1}{6t + C}. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.12) записывается теперь так

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -6\frac{1}{6t + C}\psi \quad (2.15)$$

или

$$d \ln \psi = -\frac{1}{6t + C} d(6t + C), \quad (2.16)$$

что приводит к решению

$$\psi = \frac{B}{6t + C}; \quad (2.17)$$

B и C есть постоянные интегрирования. Уравнение (2.13) преобразуем, используя решения (2.14), (2.17). Имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + 2\frac{1}{6t + C}\chi = \frac{B^2}{(6t + C)^2}. \quad (2.18)$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.18) с переменными коэффициентами известно и имеет вид

$$\chi = Ae^{-F} + e^{-F} B^2 \int e^F \frac{1}{(6t + C)^2} dt, \quad (2.19)$$

где

$$F(t) = 2 \int \frac{1}{6t + C} dt, \quad (2.20)$$

или

$$F(t) = \frac{1}{3} \ln(6t + C). \quad (2.21)$$

Используя (2.19), (2.21), находим

$$\chi = Ae^{\frac{1}{3} \ln(6t + C)} + e^{\frac{1}{3} \ln(6t + C)} B^2 \int e^{\frac{1}{3} \ln(6t + C)} \frac{1}{(6t + C)^2} dt \quad (2.22)$$

или после интегрирования

$$\chi = A(6t + C)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} B^2 (6t + C)^{-1}. \quad (2.23)$$

В результате решения трех обыкновенных дифференциальных уравнений (2.11) – (2.13) мы получили три постоянных интегрирования A , B , C , которые входят в решение (2.5):

$$h(x, t) = -\frac{1}{6t + C} x^2 + \frac{B}{6t + C} x + A(6t + C)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} B^2 (6t + C)^{-1} \quad (2.24)$$

которое запишем в виде

$$h(x, t) = \frac{A}{(6t + C)^{1/3}} - \frac{1}{6t + C} \left[x^2 - x + \frac{1}{4} B^2 \right]. \quad (2.25)$$

Отметим, что для начального момента времени

$$h(x, 0) = h(x) = \frac{A}{C^{1/3}} - \frac{1}{C} \left[x^2 - x + \frac{1}{4} B^2 \right], \quad (2.26)$$

а для начала координат

$$h(0, t) = \frac{A}{(6t + C)^{1/3}} - \frac{1}{4} \frac{B^2}{6t + C}. \quad (2.27)$$

Пусть по условию $h(0, 0) = 1$. Тогда

$$A = C^{1/3} \left[1 + \frac{B^2}{4C} \right] \quad (2.28)$$

и уравнение (2.25) приобретает вид

$$h(x, t) = \left[1 + \frac{B^2}{4C} \right] \frac{C^{1/3}}{(6t + C)^{1/3}} - \frac{1}{6t + C} \left[x^2 - x + \frac{1}{4} B^2 \right]. \quad (2.29)$$

При $B = 1$

$$h(x, t) = C^{1/3} \left[1 + \frac{1}{4C} \right] \frac{1}{(6t + C)^{1/3}} - \frac{1}{6t + C} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (2.30)$$

Константы B , C определяются конкретными условиями течения, кинетическими коэффициентами и свойствами пористой среды. В качестве примеров приведем расчеты, проведенные для различных комбинаций C и B (Рис. 2–8). В представленных результатах

математического моделирования определяющие безразмерные параметры B и C изменяются на несколько порядков. Интегральные поверхности построены с помощью пакета прикладных программ Maple, использованы обозначения $y(x,t) \leftrightarrow \tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t})$, $x \leftrightarrow \tilde{x}$, $t \leftrightarrow \tilde{t}$.

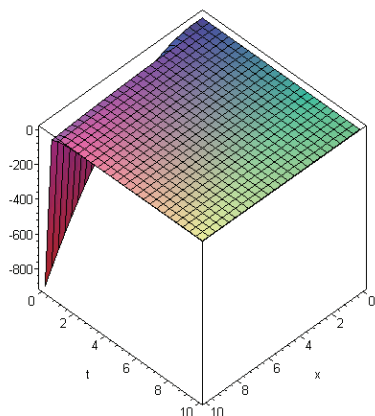


Рис. 2. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 0.1$, $B = 1$.

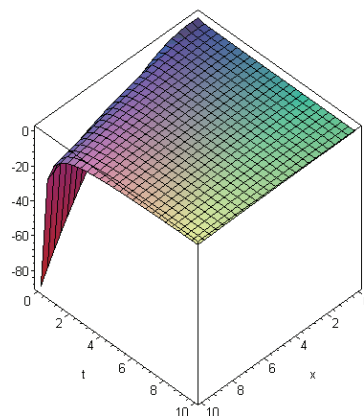


Рис. 3. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 1$, $B = 1$.

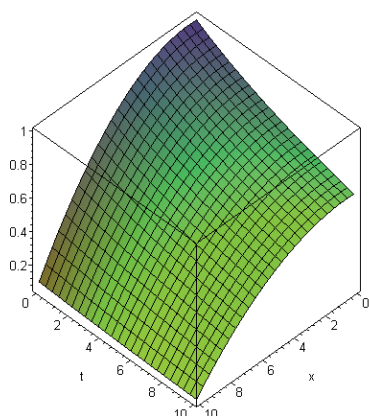


Рис. 4. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 100$, $B = 1$.

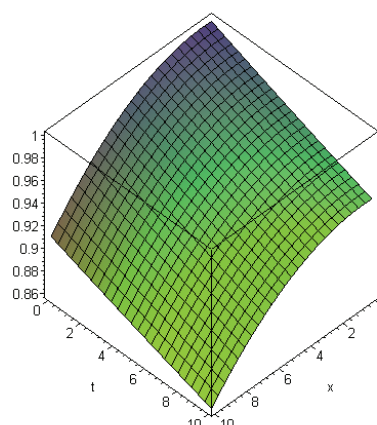


Рис. 5. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 1000$, $B = 1$.

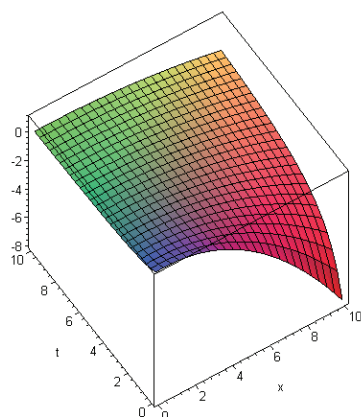


Рис. 6. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 10$, $B = 10$.

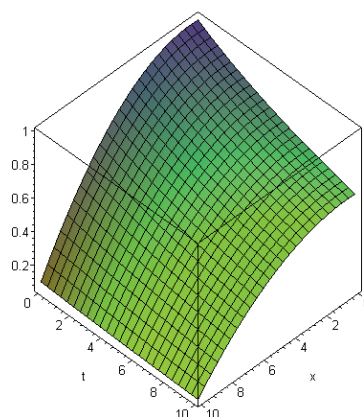


Рис. 7. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 100$, $B = 10$.

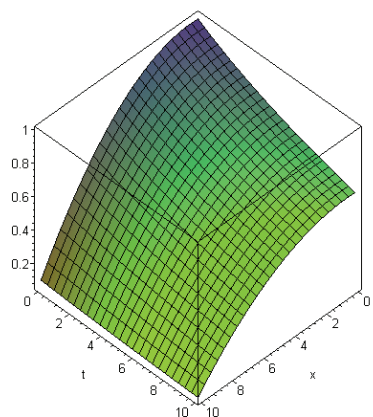


Рис. 8. Интегральная поверхность $y(x,t)$ для случая $C = 100, B = 100$.

Из расчетов следует:

1. Изменение определяющих безразмерных параметров C и B может приводить к радикальной перестройке течения (см., например, рис. 2 и 8).

2. Традиционное в теории фильтрации предположение, что элементы $AB, B0x$ являются непроницаемыми для жидкости, вводится с целью использования заведомо одномерных моделей. В этом случае высота уровня $h \geq 0$. Появление отрицательных значений высоты уровня в избранной системе координат не противоречит физическому смыслу поставленной задачи. Однако указывает на необходимость к переходу к многомерным задачам. Интересно отметить, что возможность появления отрицательных h учитывается даже одномерным нестационарным уравнением Лейбензона (см. рис. 2, 3, 6).

3. Изменение параметра C весьма существенным образом влияет на размер и положение уровня жидкости $h(x,t)$ относительно избранной системы координат.

4. Подбор параметров C и B позволяет учесть начальное распределение высоты $h(0,t)$, которое определяет дальнейшую эволюцию системы.

5. Изменение параметра B (при фиксированном C) в проведенных расчетах слабо влияет на эволюцию системы (сравните результаты расчетов, приведенных на рис. 7 и 8).

В заключение отметим, что течения в пористых материалах являются не только предметом исследований классической теории фильтрации. Расчет теплозащитных покрытий головных частей космических аппаратов (в частности, многоразовых космических систем типа Буран или Шаттл) приводит

к необходимости самосогласованного решения уравнений переноса во внешнем невязком течении, пограничном слое реагирующей смеси газов и течении в порах теплозащитного покрытия, например, графита [6, 7].

Список литературы:

1. Кочина Н.Н., Кочина П.Я., Николаевский В.Н. Мир подземных жидкостей. М.: ИФЗ, 1994. 112 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Чарный И.А. Основы подземной гидравлики. М.: Гостоптехиздат, 1956. 260 с.
4. Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.
5. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
6. Алексеев Б.В. Пограничный слой с химическими реакциями. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1967. 128 с.
7. Алексеев Б.В. Математическая кинетика реагирующих газов. М.: Наука, 1982. 420 с.

References:

1. Kochina N.N., Kochina P.Ya., Nikolaevskij V.N. Mir podzemnykh zhidkostej (World of underground liquids). M.: IFZ, 1994. 112 p.
2. Polubarinova-Kochina P.Ya. Teoriya dvizheniya gruntovykh vod (The theory of motion of ground water). M.: Nauka, 1977. 664 p.
3. Charnyj I.A. Osnovy podzemnoj gidravliki (The basics of underground hydraulics). M.: Gostoptekhizdat, 1956. 260 p.
4. Basniev K.S., Vlasov A.M., Kochina I.N., Maksimov V.M. Podzemnaya gidravlika (Underground hydraulics). M.: Nedra, 1986. 303 p.
5. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Dvizhenie zhidkostej i gazov v prirodnykh plastakh (The movement of fluids and gases in natural formations). M.: Nedra, 1984. 208 p.
6. Alekseev B.V. Pogranichnyj sloj s khimicheskimi reakciyami (Boundary layer with chemical reactions). M.: Izd. VC AN SSSR, 1967. 128 p.
7. Alekseev B.V. Matematicheskaya kinetika reagiruyushchikh gazov (Mathematical kinetics of reacting gases). M.: Nauka, 1982. 420 p.