Вестник МИТХТ, 2014, т. 9, № 6

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 533

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

Б.В. Алексеев, заведующий кафедрой, И.В. Овчинникова, доцент

кафедра Физики МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119571 Россия

**Автор для переписки, e-mail: boris.vlad.alexeev@gmail.com*

Получены автомодельные решения локальных и нелокальных гидродинамических уравнений в самосогласованном гравитационном поле для сферически симметричного случая. Установлено, что нелокальные уравнения, в отличие от локальных, описывают более широкий спектр возможных режимов движения материи после взрыва, в том числе Хаббловское расширение.

Ключевые слова: *нелокальная гидродинамика, автомодельные решения, сферически симметричный взрыв.*

Введение

Применение нелокальной гидродинамики дает возможность решения широкого круга физических проблем [1, 2]. В ряде задач, например, в задачах о взрыве, о движении шаровой молнии [3], о формировании атомных оболочек [4], предпочтительно записывать нелокальные гидродинамические уравнения в сферических координатах [2, 5]. Однако получающаяся система уравнений является очень сложной, даже для компьютерного моделирования. Положение осложняется наличием особой точки в начале координат. В связи с этим в первом приближении имеет смысл получить частные решения этой системы уравнений. В качестве частных решений в ряде случаев удобно рассматривать автомодельные решения, обладающие тем свойством, что подобное «растяжение» независимых переменных приводит к подобному «растяжению» искомой функции, при любых значениях независимых переменных. Представляет интерес нахождение и исследование автомодельных решений системы нелокальных гидродинамических уравнений для сферически симметричного случая.

1. Условия существования автомодельных решений нелокальных гидродинамических уравнений

Запишем нелокальную систему гидродинамических уравнений в сферически симметричном случае при наличии гравитационного самосогласованного потенциала [2, 5]:

(уравнение Пуассона)

$$\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial}{\partial \tilde r}\left(\tilde r^2\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde r}\right)=4\pi G\left[\tilde\rho-\tilde\tau\left(\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde t}+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde\rho\tilde v_r\right)}{\partial\tilde r}\right)\right], \tag{1}$$

(уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial}{\partial\tilde t}\left\{\tilde\rho-\tilde\tau\left[\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde t}+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde\rho\tilde v_r\right)}{\partial\tilde r}\right]\right\}+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left\{\tilde r^2\left\{\tilde\rho\tilde v_r-\tilde\tau\left[\frac{\partial}{\partial\tilde t}\left(\tilde\rho\tilde v_r\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde\rho\tilde v_r^2\right)}{\partial\tilde r}+\tilde\rho\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde r}\right]\right\}\right\}-\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left(\tilde\tau\tilde r^2\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde r}\right)=0, \tag{2}$$

(уравнение движения)

$$\frac{\partial}{\partial\tilde t}\left\{\tilde\rho\tilde v_r-\tilde\tau\left[\frac{\partial}{\partial\tilde t}\left(\tilde\rho\tilde v_r\right)+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde\rho\tilde v_r^2\right)}{\partial\tilde r}+\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde r}+\tilde\rho\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde r}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde r}\left[\tilde\rho-\tilde\tau\left(\frac{\partial\tilde\rho}{\partial\tilde t}+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde\rho\tilde v_r\right)}{\partial\tilde r}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left\{\tilde r^2\left\{\tilde\rho\tilde v_r^2-\tilde\tau\left[\frac{\partial}{\partial\tilde t}\left(\tilde\rho\tilde v_r^2\right)+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde\rho\tilde v_r^3\right)}{\partial\tilde r}+2\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde r}\tilde\rho\tilde v_r\right]\right\}\right\}+$$
$$+\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde r}-\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left(\tilde\tau\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde t}\right)-2\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left(\frac{\tilde\tau}{\tilde r^2}\frac{\partial\left(\tilde r^2\tilde p\tilde v_r\right)}{\partial\tilde r}\right)-\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial}{\partial\tilde r}\left(\tilde\tau\tilde r^2\frac{\partial\left(\tilde p\tilde v_r\right)}{\partial\tilde r}\right)=0, \tag{3}$$

(уравнение энергии)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\Bigg\{\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+3\tilde{p}-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+3\tilde{p}\right)+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{v}_r\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+5\tilde{p}\right)\right)+2\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\tilde{v}_r\Bigg]\Bigg\}+\\
&+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\Bigg\{\tilde{r}^2\Bigg\{\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+5\tilde{p}\right)\tilde{v}_r-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+5\tilde{p}\right)\tilde{v}_r\right)+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+7\tilde{p}\right)\tilde{v}_r^2\right)+\\
&+2\tilde{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{r}}\tilde{v}_r^2+\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2+3\tilde{p}\right)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}+2\Bigg\{\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\tilde{v}_r-\\
&-\tilde{\tau}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2\right)+\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg]\Bigg\}-\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{\tau}\tilde{r}^2\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{p}\tilde{v}_r^2+5\frac{\tilde{p}^2}{\tilde{\rho}}\right)\right)-\\
&-2\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{\tau}\tilde{p}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\right)=0\cdot
\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь $\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{\rho_0}$ – безразмерная плотность, $\tilde{p}=\dfrac{p}{p_0}$ – безразмерное давление, $\tilde{\psi}=\dfrac{\psi}{\psi_0}$ – безразмерный гравитационный самосогласованный потенциал, $\tilde{t}=\dfrac{t}{t_0}$ – безразмерное время, $\tilde{\tau}=\dfrac{\tau}{t_0}$ – безразмерный параметр нелокальности, $\tilde{r}=\dfrac{r}{r_0}$ – безразмерная радиальная координата, $\tilde{v}_r=\dfrac{v_r}{u_0}$ – безразмерная радиальная скорость. Масштабы, используемые для обезразмеривания, связаны соотношениями: $p_0=\rho_0u_0^2$, $r_0=u_0t_0$, $\psi_0=u_0^2$. Безразмерная гравитационная постоянная $G=\gamma\dfrac{\rho_0r_0^2}{u_0^2}$.

Уравнения системы (1-4) относятся к классу одномерных нестационарных уравнений. Для нахождения автомодельных решений этой системы введем «растяжение» времени $\tilde{t}\to a\tilde{t}$, радиальной координаты $\tilde{r}\to b\tilde{r}$ и зависимых переменных $\tilde{\psi}\to c\tilde{\psi}$, $\tilde{\rho}\to d\tilde{\rho}$, $\tilde{v}_r\to e\tilde{v}_r$, $\tilde{p}\to f\tilde{p}$. Параметр нелокальности преобразуется так же, как и время: $\tilde{\tau}\to a\tilde{\tau}$.

Из уравнений (1-4) следует:

$$\frac{c}{b^2}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\right)=4\pi Gd\left[\tilde{\rho}-\tilde{\tau}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}+\frac{ea}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)}{\partial\tilde{r}}\right)\right],\tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{a}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\Bigg\{\tilde{\rho}-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}+\frac{ea}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)}{\partial\tilde{r}}\Bigg]\Bigg\}+\frac{d}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\Bigg\{\tilde{r}^2\Bigg\{e\tilde{\rho}\tilde{v}_r-\tilde{\tau}\Bigg[e\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)+\\
&+\frac{e^2a}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2\right)}{\partial\tilde{r}}+\frac{ca}{b}\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}-\frac{af}{b^2}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{\tau}\tilde{r}^2\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}}\right)=0,
\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\Bigg\{\tilde{\rho}\tilde{v}_rde-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)de+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2\right)}{\partial\tilde{r}}\frac{ade^2}{b}+\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}}\frac{fa}{b}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\frac{cda}{b}\Bigg]\Bigg\}+\\
&+\frac{cd}{b}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\left[\tilde{\rho}-\tilde{\tau}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\tilde{t}}+\frac{ea}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)}{\partial\tilde{r}}\right)\right]+\\
&+\frac{d}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\Bigg\{\tilde{r}^2\Bigg\{\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2e^2-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2\right)e^2+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^3\right)}{\partial\tilde{r}}\frac{ae^3}{b}+\frac{cea}{b}2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\tilde{\rho}\tilde{v}_r\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}+\\
&+\frac{f}{b}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}}-\frac{f}{b}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{\tau}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{t}}\right)-\frac{afe}{b^2}2\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{p}\tilde{v}_r\right)}{\partial\tilde{r}}\right)-\frac{afe}{b^2}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{\tau}\tilde{r}^2\frac{\partial\left(\tilde{p}\tilde{v}_r\right)}{\partial\tilde{r}}\right)=0,
\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\Bigg\{\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+3\tilde{p}f-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+3\tilde{p}f\right)+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{ae}{b}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{v}_r\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+5\tilde{p}f\right)\right)+\frac{adec}{b}2\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\tilde{v}_r\Bigg]\Bigg\}+\\
&+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\Bigg\{\tilde{r}^2\Bigg\{\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+5\tilde{p}f\right)\tilde{v}_re-\tilde{\tau}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+5\tilde{p}f\right)\tilde{v}_re\right)\\
&+\frac{a}{\tilde{r}^2}\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+7\tilde{p}f\right)\tilde{v}_r^2e^2\right)++\frac{acde^2}{b}2\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\tilde{v}_r^2+\frac{ca}{b}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2de^2+3\tilde{p}f\right)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}+\\
&+2\Bigg\{\frac{dce}{b}\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\tilde{v}_r-\frac{c}{b}\tilde{\tau}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)de+\frac{ade^2}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2\right)+\frac{af}{b}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{r}}+\frac{acd}{b}\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\Bigg]\Bigg\}-\\
&-\frac{a}{b^2}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left[\tilde{\tau}\tilde{r}^2\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{p}\tilde{v}_r^2fe^2+5\frac{\tilde{p}^2}{\tilde{\rho}}\frac{f^2}{d}\right)\right]-2\frac{acf}{b^2}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{\tau}\tilde{p}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{r}}\right)=0\cdot
\end{aligned}\tag{8}$$

Для того, чтобы решения систем уравнений (1-4) и (5-8) совпадали, необходимо, чтобы вид уравнений не изменился в результате «растяжения» переменных.

Из уравнения Пуассона (5) следуют соотношения для коэффициентов растяжения

$$\frac{db^2}{c} = 1, \tag{9}$$

$$\frac{ea}{b} = 1 \cdot \tag{10}$$

Аналогичным образом рассмотрим уравнения (6)-(8). Из уравнения (6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left\{\tilde{\rho} - \tilde{\tau}\left[\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)}{\partial \tilde{r}}\right]\right\} + \frac{ae}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left\{\tilde{r}^2\left\{\tilde{\rho}\tilde{v}_r - \tilde{\tau}\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right) + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2\right)}{\partial \tilde{r}} + \frac{ca}{be}\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}\right]\right\}\right\} - \\ -\frac{af}{b^2}\frac{a}{d}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left(\tilde{\tau}\tilde{r}^2\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}}\right) = 0, \tag{11}$$

и дополнительные условия

$$\frac{fa^2}{b^2 d} = 1, \tag{12}$$

$$\frac{ca}{be} = 1. \tag{13}$$

Из (10),(12),(13) получим полезные соотношения

$$\frac{fa}{bde} = \frac{fa}{bde}\frac{a}{b}\frac{b}{a} = \frac{fa^2}{b^2 d}\frac{b}{ae} = 1, \tag{14}$$

$$\frac{f}{de^2} = \frac{fa^2}{db^2}\frac{b^2}{e^2 a^2} = 1, \tag{15}$$

$$\frac{a^2 c}{b^2} = \frac{ac}{be}\frac{ae}{b} = 1 \cdot \tag{16}$$

Разделим обе части уравнения движения (7) на $\frac{de}{a}$. С учетом соотношений (10), (13), (14) уравнение движения (7) принимает прежний вид (3).

Обратимся теперь к уравнению энергии (8). Это уравнение после деления обеих частей на $\frac{de^2}{a}$ с учетом (10), (12-16) также принимает прежний вид (4).

Таким образом, в результате мы имеем следующие соотношения для коэффициентов растяжения

$$\frac{db^2}{c} = 1, \ \frac{ea}{b} = 1, \ \frac{ca}{be} = 1, \ \frac{fa^2}{b^2 d} = 1, \tag{17}$$

которые могут быть переписаны в виде

$$e = \frac{b}{a}, \ c = \frac{b^2}{a^2}, \ d = \frac{1}{a^2}, \ f = \frac{b^2}{a^4} \cdot \tag{18}$$

2. Условия существования автомодельных решений локальных гидродинамических уравнений

Интересно найти коэффициенты растяжения для аналогичной локальной системы уравнений. В этом случае параметр нелокальности $\tilde{\tau}$ обращается в нуль.

После «растяжения» переменных из локального уравнения Пуассона имеем

$$\frac{c}{b^2}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}\right) = 4\pi G d\tilde{\rho} \cdot \tag{19}$$

Из локального уравнения неразрывности

$$\frac{d}{a}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{d}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left(\tilde{r}^2 e\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right) = 0 \cdot \tag{20}$$

Из локального уравнения движения

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r de\right) + \frac{cd}{b}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}\tilde{\rho} + \frac{d}{b}\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2 e^2\right) + \frac{f}{b}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = 0 \cdot \tag{21}$$

Наконец, из локального уравнения энергии

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2 de^2 + 3\tilde{p}f\right) + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r^2 de^2 + 5\tilde{p}f\right)\tilde{v}_r e\right) + 2\frac{dce}{b}\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}\tilde{v}_r = 0 \cdot \tag{22}$$

Тем же способом, как и в разделе 1, из уравнения (19) получим соотношение (9), из уравнения (20) - соотношение (10), из уравнения (21) – соотношения (12) и (13). Уравнение (22) также приводится к виду, которое оно имело до растяжения, при использовании соотношений (10),(12),(13).

Таким образом, для системы локальных уравнений соотношения для коэффициентов растяжения по-прежнему имеют вид (18). Отметим, что в нелокальном случае все соотношения для коэффициентов растяжения были получены из уравнений Пуассона и неразрывности. При выводе же соотношений в локальном случае было также использовано уравнение движения.

3. Система нелокальных гидродинамических автомодельных уравнений

Итак, для выполнения условий автомодельности мы получили соотношения (18) для коэффициентов растяжения. Эти соотношения представляют собой четыре уравнения для пяти независимых переменных. Удобно положить

$a=b$. Тогда из (18) следует $e=1$, $c=1$, $f=d=\frac{1}{a^2}$.

Рассмотрим преобразование для самосогласованного потенциала $\tilde{\psi}\to c\tilde{\psi}$, или

$$\tilde{\psi}\left(b\tilde{t},b\tilde{r}\right)=c\tilde{\psi}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right)=\tilde{\psi}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right). \tag{23}$$

Это уравнение должно выполняться при всех значениях $\tilde{r}$. Положим $\tilde{r}=\frac{1}{b}$, тогда

$$\tilde{\psi}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right)=\tilde{\psi}\left(b\tilde{t},b\tilde{r}\right)=\tilde{\psi}\left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{r}},1\right)=\breve{\psi}(\eta), \tag{24}$$

где $$\eta=\frac{\tilde{t}}{\tilde{r}}. \tag{25}$$

Преобразование для скорости $\tilde{v}_r\to e\tilde{v}_r$, учитывая, что $e=c$, выглядит аналогично

$$\tilde{v}_r\left(\tilde{t},\tilde{r}\right)=\breve{v}_r(\eta). \tag{26}$$

Рассмотрим преобразование для плотности $\tilde{\rho}\to d\tilde{\rho}$, или

$$\tilde{\rho}\left(b\tilde{t},b\tilde{r}\right)=d\tilde{\rho}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right)=\frac{1}{a^2}\tilde{\rho}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right), \tag{27}$$

$$\tilde{\rho}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right)=a^2\tilde{\rho}\left(b\tilde{t},b\tilde{r}\right)=\frac{1}{\tilde{r}^2}\tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{r}},1\right)=\frac{1}{\tilde{r}^2}\breve{\rho}(\eta) \tag{28}$$

Преобразование для давления $\tilde{p}\to f\tilde{p}$, учитывая, что $f=d$, имеет аналогичный вид

$$\tilde{p}\left(\tilde{t},\tilde{r}\right)=\frac{1}{\tilde{r}^2}\breve{p}(\eta). \tag{29}$$

Для последующих преобразований получим явные выражения для производных

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}=\frac{\partial\eta}{\partial\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\eta}=\left(-\frac{\tilde{t}}{\tilde{r}^2}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}=-\frac{\eta}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}=\frac{\partial\eta}{\partial\tilde{t}}\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{31}$$

С помощью (24),(26),(28), а также (30),(31) уравнение Пуассона (1) приводится к виду

$$\eta^2\frac{\partial^2\breve{\psi}}{\partial\eta^2}=4\pi G\left[\breve{\rho}-\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{r}}\left(\frac{\partial\breve{\rho}}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)}{\partial\eta}\right)\right]. \tag{32}$$

Перед круглыми скобками в (32) появился коэффициент $\tilde{\tau}/\tilde{r}$. Для решения уравнения необходимо знать зависимость этого коэффициента от η. Из (25) имеем $\tilde{t}=\eta\tilde{r}$. Логично предположить, что

$$\tilde{\tau}=\mathrm{T}(\eta)\tilde{r}, \tag{33}$$

или в простейшем случае

$$\tilde{\tau}=T\tilde{r}, \tag{34}$$

где $T=const$.

Отметим, что в размерной форме (34) принимает вид $\tau=\frac{T}{u_0}r$.

С учетом (34) получаем уравнение Пуассона в виде

$$\eta^2\frac{\partial^2\breve{\psi}}{\partial\eta^2}=4\pi G\left[\breve{\rho}-T\left(\frac{\partial\breve{\rho}}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)}{\partial\eta}\right)\right]. \tag{35}$$

В результате аналогичных преобразований с использованием (34) уравнения (2)-(4) принимают вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\breve{\rho}-T\left[\frac{\partial\breve{\rho}}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)}{\partial\eta}\right]\right\}-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\breve{\rho}\breve{v}_r-T\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2\right)}{\partial\eta}-\breve{\rho}\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\right]\right\}-$$
$$-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(T\left(2\breve{p}+\eta\frac{\partial\breve{p}}{\partial\eta}\right)\right)=0; \tag{36}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\breve{\rho}\breve{v}_r-T\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2\right)}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial\breve{p}}{\partial\eta}-2\breve{p}-\eta\breve{\rho}\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\right]\right\}-\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\left[\breve{\rho}-T\left(\frac{\partial\breve{\rho}}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)}{\partial\eta}\right)\right]-$$
$$-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\breve{\rho}\breve{v}_r^2-T\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2\right)-\eta\frac{\partial\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^3\right)}{\partial\eta}-2\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\breve{\rho}\breve{v}_r\right]\right\}-$$
$$-\eta\frac{\partial\breve{p}}{\partial\eta}-2\breve{p}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(T\frac{\partial\breve{p}}{\partial\eta}\right)+2T\frac{\partial\breve{p}}{\partial\eta}-2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(T\eta\frac{\partial\left(\breve{p}\breve{v}_r\right)}{\partial\eta}\right)-4T\eta\frac{\partial\left(\breve{p}\breve{v}_r\right)}{\partial\eta}-$$
$$-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{p}\breve{v}_r\right)+2\breve{p}\breve{v}_r\right)\right]=0; \tag{37}$$

уравнение энергии

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\breve{\rho}\breve{v}_r^2+3\breve{p}-T\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2+3\breve{p}\right)-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{v}_r\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2+5\breve{p}\right)\right)-2\breve{\rho}\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\breve{v}_r\right]\right\}-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2+5\breve{p}\right)\breve{v}_r-\right.\\
&\left.-T\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2+5\breve{p}\right)\breve{v}_r\right)-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2+7\breve{p}\right)\breve{v}_r^2\right)-2\breve{\rho}\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\breve{v}_r^2-\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2+3\breve{p}\right)\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\right]\right\}+2\left\{-\breve{\rho}\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\breve{v}_r+\right.\\
&\left.+T\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{\rho}\breve{v}_r\right)-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{\rho}\breve{v}_r^2\right)-\eta\frac{\partial\breve{p}}{\partial\eta}-2\breve{p}-\breve{\rho}\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\right]\right\}-\\
&-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left[T\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\breve{p}\breve{v}_r^2+5\frac{\breve{p}^2}{\breve{\rho}}\right)+2\left(\breve{p}\breve{v}_r^2+5\frac{\breve{p}^2}{\breve{\rho}}\right)\right)\right]-2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(T\breve{p}\eta\frac{\partial\breve{\psi}}{\partial\eta}\right)=0\cdot
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Система автомодельных уравнений (35-38) решалась численными методами.

5. Результаты математического моделирования

При численном решении системы уравнений (35-38) имеются широкие возможности варьирования численных параметров и граничных условий. При математическом моделировании данной системы можно менять численные значения безразмерной гравитационной постоянной *G* и безразмерного нелокального параметра *T*, а также вводить зависимость $T(\eta)$. Можно варьировать также восемь условий Коши для четырех зависимых переменных $\breve{\rho}$, $\breve{p}$, $\breve{v}_r$, $\breve{\psi}$.

Расчеты проводились с помощью пакета Maple 9 и старших версий. Последующие рисунки отражают результаты проведенных вычислений. На рисунках используются обозначения: r – плотность $\breve{\rho}$, u – скорость $\breve{v}_r$, p – давление $\breve{p}$, параметр H=*T*. Независимая переменная t на оси абсцисс соответствует переменной $\eta=\frac{\tilde{t}}{\tilde{r}}$. Все используемые условия Коши приведены в табл.1.

Таблица 1. Условия Коши

	$\breve{v}_r(0)$	$\breve{\rho}(0)$	$\breve{p}(0)$	$\breve{\psi}(0)$	$\frac{d\breve{v}_r}{d\eta}(0)$	$\frac{d\breve{\rho}}{d\eta}(0)$	$\frac{d\breve{p}}{d\eta}(0)$	$\frac{d\breve{\psi}}{d\eta}(0)$
A	1	1	1	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	100	100	100	100

Рассмотрим сначала результаты, полученные без учета нелокальности (*T*=0).

Пусть безразмерная гравитационная постоянная *G*=1, граничные условия приведены в табл. 1 (А). Графики зависимости плотности и давления от $\eta=\frac{\tilde{t}}{\tilde{r}}$ (рис. 1,2) показывают, что в произвольной точке на расстоянии $\tilde{r}$ от начала координат (центра взрыва) с течением времени плотность вещества и давление возрастают как результат развития взрывного процесса. Эти же графики показывают, что в каждый момент времени плотность и давление убывают с ростом расстояния от центра взрыва.

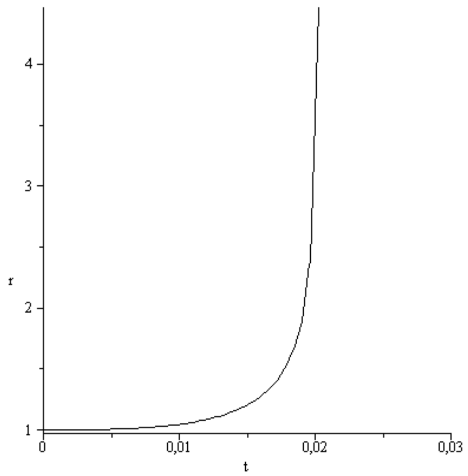

Рис. 1. Зависимость плотности от η. *G*=1, *T*=0. Граничные условия А.

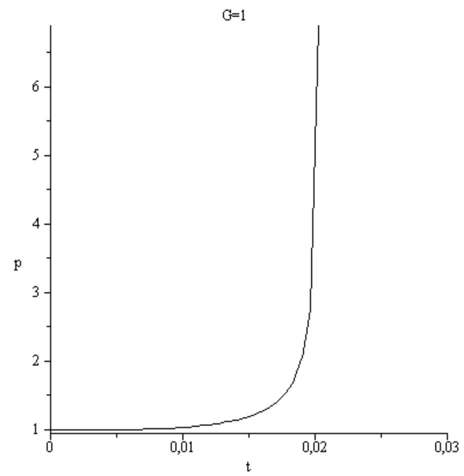

Рис. 2. Зависимость давления от η. *G*=1, *T*=0. Граничные условия А.

Радиальная скорость потока ускоренно увеличивается в каждой заданной точке с течением времени ($\breve{v}_r \approx const \cdot \tilde{t}^{\,n}$, $n \succ 1$) (рис. 3). При этом в каждый заданный момент времени $\breve{v}_r \approx \dfrac{const}{\tilde{r}^{\,n}}$, то есть уменьшается по мере увеличения расстояния от центра взрыва.

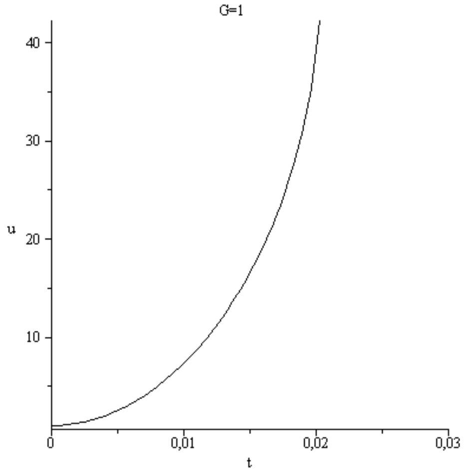

Рис. 3. Зависимость радиальной скорости потока от η. *G*=1, *T*=0. Граничные условия А.

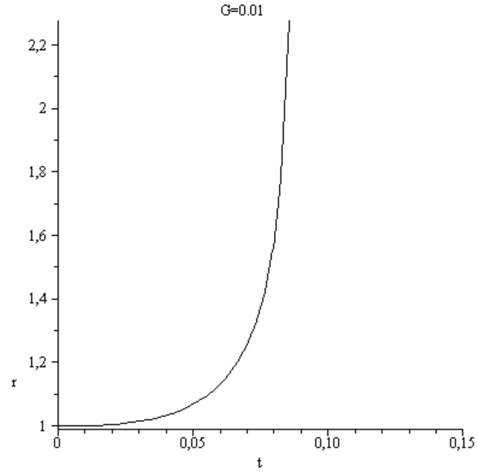

Рис. 4. Зависимость плотности от η. *G*=0,01, *T*=0. Граничные условия А.

Уменьшение гравитационной постоянной (*G*=0,01) при тех же граничных условиях А (табл.1) приводит к тому, что рост плотности, давления и гидродинамической скорости в зависимости от времени замедляется в каждой заданной точке (на рис.4 приведены результаты расчетов для плотности). Соответственно, в каждый момент времени с уменьшением расстояния до центра эти величины растут медленнее, чем при *G*=1. Таким образом, как и следовало ожидать, уменьшение гравитационной постоянной замедляет процессы, развивающиеся при взрыве, не меняя существенно их характер.

Рассмотрим теперь результаты, полученные при расчетах с учетом нелокальности (нелокальный параметр *T*≠0).

Пусть *G*=0,01, *T*=10. Из рис.5,6 видно, что в этом случае характер эволюции физической системы меняется: в любой заданной точке давление сначала падает с течением времени и лишь затем увеличивается. При этом характер зависимости не меняется с увеличением начальных производных (переход от режима А к режиму В, табл.1) (ср. рис.5,6). Однако с увеличением начальных производных (энергии взрыва) численные значения наблюдаемых давлений увеличиваются в ~ 1000 раз.

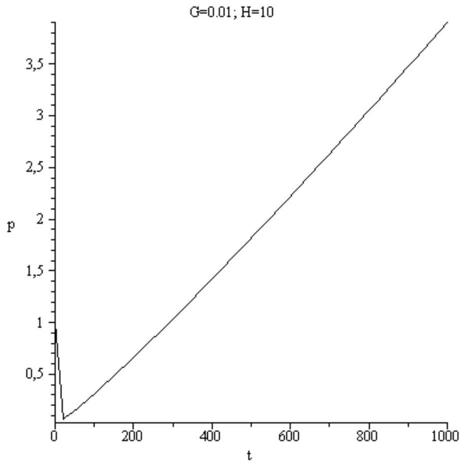

Рис. 5. Зависимость давления от η. *G*=0,01,*T*=10. Граничные условия А.

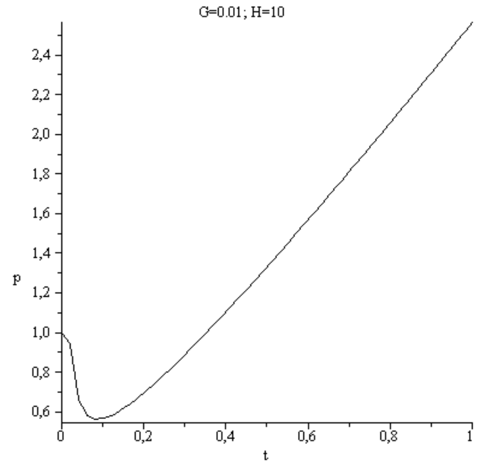

Рис. 6. Зависимость давления от η. *G*=0,01, *T*=10. Граничные условия В.

При этом плотность и гравитационный потенциал уменьшаются с ростом $\tilde{t}$ в каждой заданной точке (на рис.7 приведен один из полученных графиков для плотности). Соответственно, в каждый заданный момент времени плотность и потенциал увеличиваются с ростом расстояния да центра.

На фоне такого распределения плотности и потенциала наблюдается гидродинамический поток вещества к центру ($\breve{v}_r \prec 0$) (см.рис. 8,9).

Однако на том же рисунке существует область, в которой $\breve{v}_r \succ 0$, при этом $\breve{v}_r$ возрастает с ростом $\tilde{r}$ (при $\eta \prec 0{,}01$). Это режим, близкий к известному в астрофизике Хаббловскому режиму с $\breve{v}_r \approx const \cdot \tilde{r}$ [6]. Отметим, что подобная область в данный момент времени может охватывать достаточно широкий диапазон значений $\tilde{r}$, поскольку при $\tilde{r} \to \infty$ $\eta \to 0$.

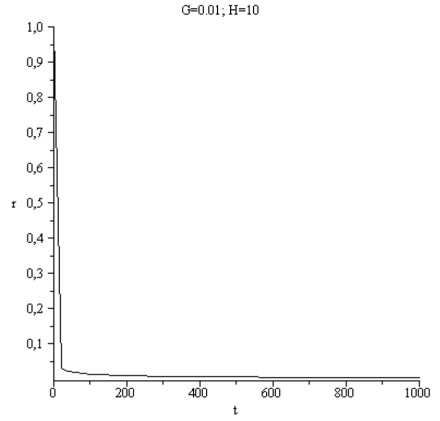

Рис. 7. Зависимость плотности от η. *G*=0,01, *T*=10. Граничные условия B.

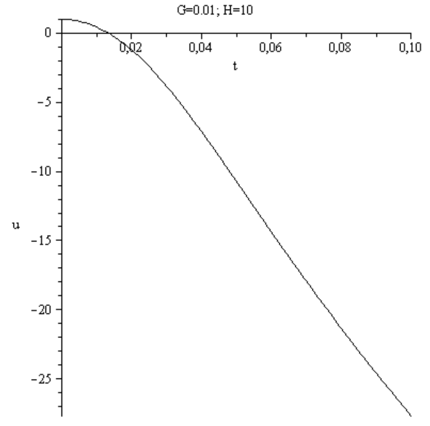

Рис. 8. Зависимость радиальной скорости потока от η. *G*=0,01, *T*=10. Граничные условия А.

Изменение граничных условий (с А на В, табл.1) не меняет принципиальный характер зависимости радиальной скорости потока от η, хотя несколько сужает область положительных значений скорости (ср. рис.8, 9).

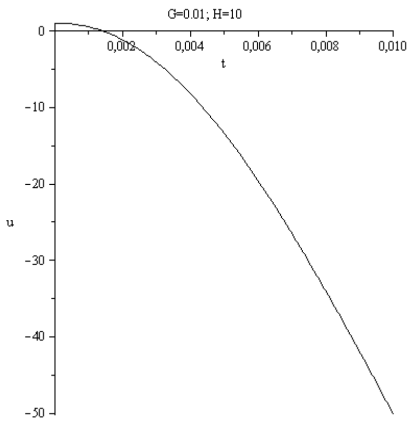

Рис. 9. Зависимость радиальной скорости потока от η.*G*=0,01,*T*=10.

Начальные условия В.

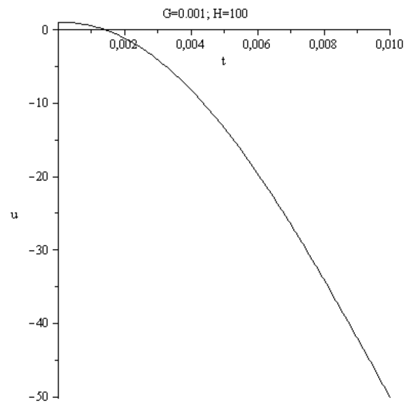

Рис. 10. Зависимость радиальной скорости потока от η.*G*=0,001,*T*=100.

Начальные условия В.

На рис. 10 приведен один из графиков, полученный при варьировании параметров *G* и *T*. Видно, что характер зависимости от η для радиальной скорости сохраняется (ср. рис. 9 и 10 с одинаковыми граничными условиями).

Заключение

Метод поиска автомодельных решений является эффективным инструментом решения сложных задач гидродинамики и позволяет получить представление о поведении эволюционирующей системы в пространстве и во времени. Полученные автомодельные решения для локальных и нелокальных гидродинамических уравнений принципиально отличаются. Локальные сферически симметричные гидродинамические уравнения описывают обычный взрыв, при котором вещество распространяется от центра взрыва, при этом скорость движения уменьшается с увеличением расстояния от центра. Нелокальные сферически симметричные гидродинамические уравнения могут описывать режимы, при которых скорость увеличивается с ростом расстояния от центра взрыва (Хаббловское расширение), а также обратное движение материи к центру. Широкий спектр варьирования численных параметров и начальных условий дает возможность применять полученные результаты к различным конкретным физическим задачам. Конечно, для получения точного решения необходимо численно решать систему гидродинамических уравнений с двумя независимыми переменными.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алексеев Б.В. Нелокальная физика. Нерелятивистская теория. Saarbrücken: Lambert, 2011. 499 p.
2. Алексеев Б.В., Овчинникова И.В. Нелокальная физика. Релятивистская теория. Saarbrücken: Lambert, 2011. 406 p.
3. Алексеев Б.В. Солитоны в обобщенной квантовой гидродинамике и теория шаровой молнии // Вестник МИТХТ. 2009. Т. 4. № 3. С. 3–21.
4. Алексеев Б.В. Обобщенная квантовая гидродинамика // Вестник МИТХТ. 2008. Т. 3. № 3. С. 3–19.
5. Алексеев Б.В., Овчинникова И.В. Квантовая релятивистская гидродинамика. Часть 3. М.: ИПЦ МИТХТ, 2012. 71 с.
6. Alexeev B.V. To the Theory of Galaxies Rotation and the Hubble Expansion in the Frame of Non-Local Physics // J. of Modern Physics. 2012. V. 3. № 29A. P. 1103–1122. doi:10.4236/jmp.2012.312239 Published Online December 2012.

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF HYDRODYNAMIC EQUATIONS OF NON-LOCAL PHYSICS

B.V. Alexeev[@], I.V. Ovchinnikova

M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119571 Russia

[@]*Corresponding author e-mail: boris.vlad.alexeev@gmail.com*

For linear partial differential equations there are various techniques for reducing the partial differential equations (PDE) to the ordinary differential equations (ODE) or at least to equations in a smaller number of independent variables. These include various integral transforms and eigenfunction expansions. Usually such techniques are not applicable in dealing with nonlinear partial differential equations. From this point of view the presented approach is much more interesting. It identifies equations for which the solution depends on certain groupings of the independent variables rather than depending on each of the independent variables separately. The name of these solutions, self-similar, comes from the fact that the spatial distribution of the characteristics of motion remains similar to itself at all times during the motion.

Roughly speaking, the idea is to look whether the solution of a problem $u(x, y)$ *can be collapsed in a function* $u(x, y) = U(y / f(x))$*. The function* $f(x)$ *may be found by substitution in the PDE, in order to obtain an ODE for* U*. Self-similar solutions of the non-local equations describing the explosion with the spherical symmetry are investigated for the case of the astrophysical applications. Namely, in the quasi-stationary Hubble regime only the implicit dependence on time for the unknown values exists. It means that for the intermediate (Hubble) regime the complicated PDE set can be transformed in the set ODE. This possibility can be realized also in the case if the self-similar solutions exist. The mentioned self-similar solutions are found for Hubble regime.*

Keywords: *non-local hydrodynamics, self-similar solutions, explosion with the spherical symmetry.*