

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ
ВО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ**

Э.М. Карташов[@], заведующий кафедрой, И.А. Нагаева, доцент

*Кафедра высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В.Ломоносова,
Москва, 119571 Россия*

[@]Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

Рассмотрены практически важные задачи нестационарной теплопроводности с переменным во времени относительным коэффициентом теплообмена. Приведена систематизация различных подходов при нахождении аналитического решения задачи: метод расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье; разложение искомой температурной функции в степенной ряд; сведение задачи к интегральному уравнению Вольтера второго рода. Показано, что во всех случаях решение сводится к бесконечному ряду последовательных приближений различной функциональной формы и главной целью каждого из подходов является отыскание наиболее удачного первого приближения. Рассмотрены частные случаи временной зависимости относительного коэффициента теплообмена: линейная, экспоненциальная, степенная, корневая. Приведены аналитические решения и численные эксперименты, выявлены особенности температурных кривых для ряда указанных зависимостей. Установлено, что для линейного закона во времени коэффициента теплоотдачи картина изменения температурной кривой по сравнению с классическим случаем для постоянного коэффициента существенно изменяется, в то время как экспоненциальная зависимость не вносит существенных изменений.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, переменный во времени относительный коэффициент теплообмена, аналитические методы решения краевых задач с переменным коэффициентом, последовательные приближения, иллюстративные примеры.

**THERMAL CONDUCTIVITY AT VARIABLE IN TIME RELATIVE
TO THE HEAT TRANSFER COEFFICIENT**

E.M.Kartashov[@], I.A. Nagaeva

*M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies,
Moscow, 119571 Russia*

[@]Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru

The practically important problem of unsteady heat conduction with time-varying relative coefficient of heat transfer is considered. Systematization of different approaches for finding the analytical solution of the problem is shown: the method of splitting the generalized Fourier integral; expanding the desired temperature function in a power series; reduction of the problem to an integral Voltaire equation of the second kind. It is shown that in all cases the solution is reduced to an infinite series of successive approximations of various functional forms, and the main goal of each approach is to find the more successful of the first approximations. Particular cases of the time dependence of the relative heat transfer coefficient are considered: linear, exponential, degree, root. The analytical solutions and numerical experiments, the peculiarities of the temperature curves for a number of specified dependencies are given. It was established that in case of the time-linear heat transfer coefficient the temperature curve changes significantly differ in comparison with the classical case of constant coefficient, while exponential dependence makes no substantive difference.

Keywords: transient heat transfer, time-varying relative heat transfer coefficient, analytical methods for solving boundary value problems with variable coefficients, successive approximations, Illustrative examples.

Введение

В классических задачах теплопроводности твердых тел [1] относительный коэффициент теплообмена $h = \alpha/\lambda$ (α – коэффициент теплоотдачи, λ – теплопроводность) принимается величиной постоянной; считается, что α определяется только температурным напором. Однако, как показывают экспериментальные исследования, в ряде нестационарных процессов теплообмена коэффициент теплоотдачи является неравновесным и зависит от времени, то есть $h = h(t)$.

Соответствующие задачи теплопроводности с граничными условиями вида $(\partial T/\partial n)_r = h(t)[T|_r - T_c]$, $t > 0$ представляют большой практический интерес, и этим случаям в аналитической теории теплопроводности традиционно уделялось повышенное внимание [2,3]. Зависимость $h(t)$ наблюдается при формировании теплового пограничного слоя в условиях нестационарного обтекания твердых поверхностей охлаждающей жидкостью; нагреве тел пульсирующим потоком жидкости или газа; при движении баллистического тела в среде с переменной плотностью и температурой; теплообмене прокатываемого металла с валками и окружающей средой; изучении явлений турбулентности при контактном измерении температуры выходных газов; нестационарном охлаждении термоэлектрических устройств; в процессах диффузии в условиях переменной температуры при изучении физической химии металлов; фазовых переходах и др. [2, 3]. Помимо технологических имеется также ряд других причин изменения коэффициента теплообмена во времени: изменение физических характеристик теплоносителя (скорости движения, степени черноты, плотности и т.п.) или изменение с течением времени состояния поверхности нагреваемого тела (окисление, засорение пылью, растрескивание и т.п.). До настоящего времени не найдено точное решение задачи теплопроводности в замкнутой форме при произвольном законе изменения коэффициента $h(t)$: искомая температурная функция не выражается в квадратурах и точное решение задачи имеет вид бесконечного ряда последовательных приближений. Трудность заключается в том, что невозможно, оставаясь в рамках классических методов математической физики, согласовать решение уравнения теплопроводности с граничным условием теплопроводности при переменном $h(t)$. Объяснение этому факту достаточно простое. Для произвольной временной зависимости относительного коэффициента теплообмена собственные значения и собственные функции как решения соответствующей спектральной задачи формально зависят от времени, а это значит, что решение исходной задачи не может быть записано в виде интеграла Фурье-Ханкеля для частично ограниченной области или

в виде ряда Фурье-Ханкеля для конечной области канонического типа. Последнее означает, что метод разделения переменных Фурье, лежащий в основе практически всех подходов классических дифференциальных уравнений математической физики, к цели не приводит. Характерной особенностью указанного класса задач при нахождении их решений является возможность варьирования различными подходами. Это объясняется тем, что решение одной и той же тепловой задачи можно искать в различных классах функций, когда выявляются особенности структуры получаемых решений. Эти функции должны удовлетворять ряду требований: во-первых, они должны достаточно легко находиться, во-вторых, обеспечивать сходимость процесса настолько хорошо, чтобы можно было сделать требуемые в задаче заключения о свойствах полученного решения, в-третьих, обеспечивать существование всех операций, допускаемых в процессе преобразований, в-четвертых, быть удобными в практическом плане при рассмотрении конкретных (частных) законов коэффициента $h(t)$ после нахождения решения задачи для произвольной зависимости коэффициента теплообмена. В связи с этим на практике используются различные подходы, дающие точные (в виде бесконечного ряда) или приближенные решения такого класса задач для пластины, цилиндра, шара, полуограниченного стержня при произвольном законе и его частных зависимостях: экспоненциальной, степенной, корневой, линейной, периодической, импульсной, пульсирующей и т.д. Это метод тепловых потенциалов, когда уравнение теплопроводности сводится к интегральному уравнению Вольтера второго рода и далее используется пикаровский процесс разложения по параметру; интегральный метод Кармана - Польгаузена из теории гидродинамического пограничного слоя; метод разложения по малому параметру (методы возмущений); операционный с использованием метода последовательных приближений; метод бичастотной передаточной функции; метод усреднения функциональных поправок; метод сведения уравнения теплопроводности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием функции Грина; вариационный метод; метод расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье, дающего интегральную форму первого приближения при произвольной зависимости $h(t)$; асимптотические методы; метод координатных функций с использованием фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий и др. ([2–4] и ссылки в [2–4]). Несмотря на многообразие подходов, каждый из них, в конечном счете, приводит решение задачи к бесконечному ряду последовательных приближений, и главной целью каждого из подходов является отыскание наиболее удачного первого приближения.

Различные формы пикаровского процесса

Рассмотрим некоторые подходы при нахождении аналитического решения задачи с переменным относительным коэффициентом теплообмена с использованием пикаровского процесса последовательных приближений. В безразмерных переменных

$$x = \frac{z}{l}, \quad F_0 = \frac{at}{l^2}, \quad Bi(F_0) = \frac{\alpha(t)l}{\lambda}, \quad T(x, t) = \frac{W(z, t) - T_0}{T_c - T_0},$$

где l – выбранная единица масштаба, имеем задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad F_0 > 0, \quad (1)$$

Следуя [5], на начальном этапе применим метод расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье:

$$L[T(x, F_0)] = \tilde{T}(\xi, F_0) = \int_0^\infty T(x, F_0) \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] dx \quad (5)$$

функции $T(x, F_0)$ с формулой обращения

$$T(x, F_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{T}(\xi, F_0) \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] \frac{\xi^2 d\xi}{\xi^2 + Bi^2(F_0)} \quad (6)$$

Если ввести обозначения

$$\omega(\xi, F_0) = 1 - i \frac{Bi(F_0)}{\xi}, \quad \bar{\omega}(\xi, F_0) = 1 + i \frac{Bi(F_0)}{\xi}, \quad (7)$$

при которых

$$\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x = \frac{1}{2} [\omega \exp(i \xi x) + \bar{\omega} \exp(-i \xi x)], \quad (8)$$

а также

$$A(\xi, F_0) = \int_0^\infty T(x, F_0) \exp(i \xi x) dx, \quad (9)$$

$$\bar{A}(\xi, F_0) = \int_0^\infty T(x, F_0) \exp(-i \xi x) dx, \quad (10)$$

то изображение

$$\tilde{T}(\xi, F_0) = \frac{1}{2} [\omega(\xi, F_0) A(\xi, F_0) + \bar{\omega}(\xi, F_0) \bar{A}(\xi, F_0)]. \quad (11)$$

Для перевода уравнения (1) в пространство изображений понадобятся ещё два соотношения:

$$\frac{\partial \tilde{T}(\xi, F_0)}{\partial F_0} = \frac{1}{2} \left[\omega(\xi, F_0) \frac{\partial A(\xi, F_0)}{\partial F_0} + \bar{\omega}(\xi, F_0) \frac{\partial \bar{A}(\xi, F_0)}{\partial F_0} \right], \quad (12)$$

$$L \left[\frac{\partial^2 T(\xi, F_0)}{\partial x^2} \right] = Bi(F_0) - \frac{1}{2} \xi^2 [\omega(\xi, F_0) A(\xi, F_0) + \bar{\omega}(\xi, F_0) \bar{A}(\xi, F_0)]. \quad (13)$$

Переведем задачу (1)-(4) в пространство изображений (5):

$$\begin{cases} \omega \frac{\partial A}{\partial F_0} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{A}}{\partial F_0} + \xi^2 (\omega A + \bar{\omega} \bar{A}) = 2Bi(F_0), F_0 > 0, \\ A(\xi, F_0)|_{F_0=0} = \bar{A}(\xi, F_0)|_{F_0=0} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$T(x, F_0)|_{F_0=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(x, F_0)}{\partial x} \Big|_{x=0} = Bi(F_0) [T(x, F_0)|_{x=0} - 1], \quad F_0 > 0, \quad (3)$$

$$|T(x, F_0)| < \infty, \quad x \geq 0, \quad F_0 \geq 0. \quad (4)$$

Здесь $Bi(F_0)$ – непрерывно-дифференцируемая неотрицательная функция; искомое решение:

$$T(x, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}); \quad grad T(x, t) \in C^0(\bar{\Omega});$$

$$\bar{\Omega} = (x \geq 0, t \geq 0).$$

Рассмотрим подробнее:

$$\omega \frac{\partial A}{\partial F_0} + \overline{\omega} \frac{\partial \overline{A}}{\partial F_0} + \xi^2 (\omega A + \overline{\omega} \overline{A}) - 2Bi(F_0) = \int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial F_0} \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] dx + \xi^2 \int_0^\infty T(x, F_0) \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] dx = \theta(\xi, F_0) = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{T}(\xi, F_0) = \operatorname{Re}[\omega(\xi, F_0)A(\xi, F_0)] = \int_0^\infty T(x, F_0) \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] dx \quad (16)$$

Раскрывая соотношение $\omega \left(\frac{\partial A}{\partial F_0} + \xi^2 A \right) - Bi(F_0)$ с учетом (15)-(16), находим:

$$\omega \left(\frac{\partial A}{\partial F_0} + \xi^2 A \right) - Bi(F_0) = \theta(\xi, F_0) + i\psi(\xi, F_0),$$

или

$$\omega \left(\frac{\partial A}{\partial F_0} + \xi^2 A \right) - Bi(F_0) = i\psi(\xi, F_0), \quad F_0 > 0, \quad (17)$$

где

$$\psi(\xi, F_0) = \frac{1}{\xi} \left\{ [Bi^2(F_0) + \xi^2] T(0, F_0) - Bi^2(F_0) \right\}. \quad (18)$$

Таким образом, можно перейти к задаче Коши относительно функции $A(\xi, F_0)$ вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{A}}{\ddot{F}_0} + \xi^2 A &= \frac{Bi(F_0)}{\omega} + i \frac{\psi(\xi, F_0)}{\omega}, \quad F_0 > 0, \\ A(\xi, F_0) \Big|_{F_0=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Функцию $\frac{i\psi(\xi, F_0)}{\omega} = i \frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2} \psi(\xi, F_0)$ представим в виде

$$i \frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2} \psi(\xi, F_0) = \psi_1(\xi, F_0) + i\psi_2(\xi, F_0) = \left[\frac{Bi^3(F_0)}{Bi^2(F_0) + \xi^2} - Bi(F_0)T(0, F_0) \right] + i \left[\xi T(0, F_0) - \frac{Bi^2(F_0)\xi}{Bi^2(F_0) + \xi^2} \right]. \quad (20)$$

Решение задачи Коши (19) имеет вид:

$$A(\xi, F_0) = \int_0^{F_0} \frac{Bi(\tau)\overline{\omega}(\xi, \tau)}{|\omega|^2} \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\tau + i \int_0^{F_0} \frac{\psi(\xi, \tau)\overline{\omega}(\xi, \tau)}{|\omega|^2} \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\tau \quad (21)$$

и далее из (21) находим искомое изображение $\tilde{T}(\xi, F_0)$ с учетом (20):

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\xi, F_0) &= \operatorname{Re}[\omega(\xi, F_0)A(\xi, F_0)] = \int_0^{F_0} \frac{\xi^2 + Bi(F_0)Bi(\tau)}{\xi^2 + Bi^2(\tau)} Bi(\tau) \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\tau + \\ &+ Bi(F_0) \int_0^{F_0} \left[T(0, \tau) - \frac{Bi^2(\tau)}{Bi^2(\tau) + \xi^2} \right] \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

После упрощения выражение (22) приводится окончательно к виду:

$$\tilde{T}(\xi, F_0) = \int_0^{F_0} Bi(\tau) \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\tau + \int_0^{F_0} [Bi(F_0) - Bi(\tau)] T(0, \tau) \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\tau. \quad (23)$$

Теперь по формуле обращения (6) можно записать для искомой функции $T(x, F_0)$:

$$T(x, F_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} Bi(\tau) d\tau \int_0^\infty \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] \frac{\xi^2 \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)]}{\xi^2 + Bi^2(F_0)} d\xi + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} [Bi(F_0) - Bi(\tau)] T(0, \tau) d\tau \int_0^\infty \left[\cos \xi x + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi x \right] \frac{\xi^2 \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)]}{\xi^2 + Bi^2(F_0)} d\xi. \quad (24)$$

Одним из доказательств справедливости найденного соотношения (24) является рассмотрение в (24) частного (классического) случая $Bi(F_0) = Bi^* = const$. Для этого случая соотношение (24) автоматически дает классическое решение:

$$T(x, F_0) = \Phi^* \left(\frac{x}{2\sqrt{F_0}} \right) - \exp(Bi^* x + Bi^{*2} F_0) \Phi^* \left(\frac{x}{2\sqrt{F_0}} + Bi^* \sqrt{F_0} \right), \quad (25)$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(z)$ - функция Лапласа.

Правая часть (24) зависит от неизвестной величины $T(0, F_0)$. Полагая в (24) $x = 0$, приходим к интегральному уравнению Вольтера 2 рода относительно $T(0, F_0)$:

$$T(0, F_0) = \theta_1(F_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} \theta_2(F_0, \tau) T(0, \tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(F_0) &= \int_0^{F_0} Bi(\tau) \psi_0(F_0, \tau) d\tau, \\ \theta_2(F_0, \tau) &= [Bi(F_0) - Bi(\tau)] \psi_0(F_0, \tau), \\ \psi_0(F_0, \tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)]}{\xi^2 + Bi^2(F_0)} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Решение уравнения (26) с использованием пикаровского процесса последовательных приближений представим в виде

$$T(0, F_0) = T_0(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \right)^n T_n(F_0), \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_0(F_0) &= \theta_1(F_0), \\ T_n(F_0) &= \int_0^{F_0} \theta_2(F_0, \tau) T_{n-1}(\tau) d\tau, n \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Из (28)-(29) находим искомую величину в виде бесконечного ряда последовательных приближений:

$$T(0, F_0) = \theta_1(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \int_0^{F_0} \theta_2(F_0, \tau) d\tau \int_0^\tau \theta_2(\tau, \tau_1) d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} \theta_2(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \quad (30)$$

Покажем, что ряд (30) сходится равномерно при всех $F_0 > 0$ в любом конечном промежутке изменения F_0 . Будем считать, что функция $Bi(F_0)$ ограниче-

на на отрезке $[0, F_0]$, то есть $|Bi(F_0)| \leq M/2$. Тогда ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (30) будет мажорироваться рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} M^{n+1}}{(\sqrt{\pi})^{3n+1}} \int_0^{F_0} \frac{d\tau}{\sqrt{F_0 - \tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}} \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau_1 - \tau_2}} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \frac{d\tau_n}{\sqrt{\tau_{n-1} - \tau_n}} \quad (31)$$

Общий член этого ряда можно определить. Вычислим несколько первых интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_{n-1}} \frac{d\tau_n}{\sqrt{\tau_{n-1} - \tau_n}} &= 2(\sqrt{\tau_{n-1}})^1 \\ \int_0^{\tau_{n-2}} \frac{(\sqrt{\tau_{n-1}})^1 d\tau_{n-1}}{\sqrt{\tau_{n-2} - \tau_{n-1}}} &= \frac{\pi}{2} (\sqrt{\tau_{n-2}})^2 \\ \int_0^{\tau_{n-3}} \frac{(\sqrt{\tau_{n-2}})^2 d\tau_{n-2}}{\sqrt{\tau_{n-3} - \tau_{n-2}}} &= \frac{4}{3} (\sqrt{\tau_{n-3}})^3 \end{aligned}$$

и проверяя по индукции, замечаем, что

$$\int_0^{\tau_{n-m}} \frac{(\sqrt{\tau_{n-(m-1)}})^{m-1} d\tau_{n-(m-1)}}{\sqrt{\tau_{n-m} - \tau_{n-(m-1)}}} = \lambda_m (\sqrt{\tau_{n-m}})^m,$$

где λ_m - пока не известна. Для нахождения λ_m сделаем в интеграле замену переменной $\tau_{n-(m-1)} = \tau_{n-m} \sin^2 \varphi$. Тогда получим: $\lambda_m (\sqrt{\tau_{n-m}})^m = (\sqrt{\tau_{n-m}})^m 2 \int_0^{\pi/2} \sin^m \varphi d\varphi$.

Отсюда

$$\lambda_m = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^m \varphi d\varphi = \begin{cases} 2 \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, m = 2k-1, \\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi, m = 2k. \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Заметим, что $\lambda_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $(n+1)$ -й член ряда (31) содержит $(n+1)$ интегралов, следовательно, он равен $\left[\frac{2^{n-1} M^{n+1}}{(\sqrt{\pi})^{3n+1}} \right] \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1} (\sqrt{F_0})^{n+1}$. Вычисляем коэффициенты

$$d_{n+1} = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{n+1}} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1} = \begin{cases} \pi^{-1/2} 2^{(2n+1)/2} \frac{1}{(n+1)!!}, n = 2k-1 \\ 2^{(2n+1)/2} \frac{1}{(n+1)!!}, n = 2k \end{cases}$$

Таким образом, ряд (31) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} M^{n+1} d_{n+1}}{(\sqrt{\pi})^{2n}} (\sqrt{F_0})^{n+1}. \quad (32)$$

Сходимость ряда (32) для всех $F_0 > 0$ легко проверить по признаку Даламбера.

В качестве примеров рассмотрим случаи, представляющие интерес для процессов теплообмена прокатываемого металла с валками и окружающей средой [3]. В первом случае $Bi(F_0) = Bi^* + Pd \cdot F_0$ (Pd – число Прандтля), во втором – $Bi(F_0) = Bi^* + \beta \exp(-Pd \cdot F_0)$.

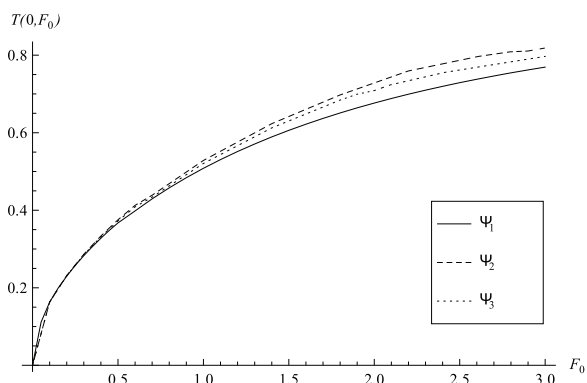


Рис. 1. Температурные кривые приближений на границе $x = 0$ области при $Bi^* = 0.5, Pd = 1$ для $Bi(F_0) = Bi^* + Pd \cdot F_0$.

На рис. 1 приведены значения приближений температурной функции (30) $\Psi_1(F_0) = T_0(F_0)$, $\Psi_2(F_0) = T_0(F_0) + (2/\pi)T_1(F_0)$, $\Psi_3(F_0) = T_0(F_0) + (2/\pi)T_1(F_0) + (2/\pi)^2 T_2(F_0)$ для первого случая, рассчитанные в зависимости от критерия F_0 в сечении $x = 0.5$ при $Bi^* = 0.5, Pd = 1$. Из рисунка видно, что первое и второе приближения берут в вилку третье приближение, что позволяет с достаточной для практики точностью ограничиться тремя первыми приближениями.

На рис. 2 приведены кривые распределения температуры $T(x, F_0)$ (24) в сечении $x = 0.5$ в зависимости от F_0 для первого случая изменения $Bi(F_0)$ при $Bi^* = 0.5$ и $Bi^* = 1$ (при трех приближениях в (30)) для

$Pd = 0$ (классический случай (25)) и $Pd = 1$. Видно, что наличие переменного во времени линейного относительного коэффициента теплообмена резко меняет картину тепловой реакции области на нагрев: температура возрастает, достигает максимума и затем убывает, заходя в отрицательную область значений (последнее, по-видимому, ограничивает область значений Фурье при конкретных расчетах).

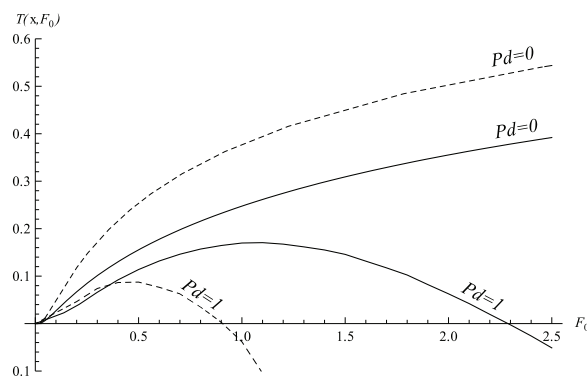


Рис. 2. Температурная кривая $T(0.5, F_0)$ для $Bi(F_0) = Bi^* + Pd \cdot F_0$ при $Bi^* = 0.5$ (сплошные кривые) и $Bi^* = 1$ (пунктирные кривые), $Pd = 0$ (классический случай), $Pd = 1$ (влияние переменного во времени коэффициента).

На рис. 3 приведены кривые распределения температуры $T(x, F_0)$ (24) в сечении $x = 0.5$ в зависимости от Фурье для второго случая изменения $Bi(F_0)$ (при трех приближениях в (30)) для $\beta = 0$ (классический случай (25)) $\beta = 1, Pd = 1$. Видно, что в интервале практических значений Фурье влияние экспоненциального во времени коэффициента $Bi(F_0)$ не существенно.

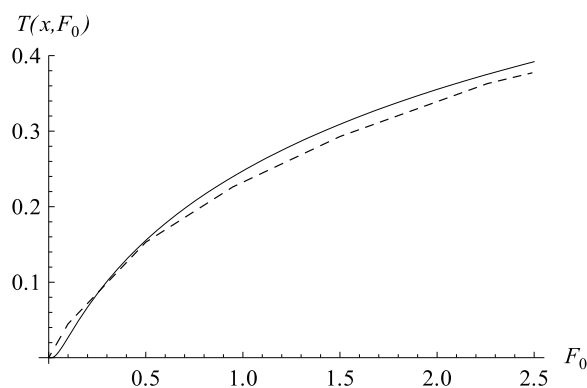


Рис. 3. Температурная кривая $T(0.5, F_0)$ для $Bi(F_0) = Bi^* + \beta \exp(-Pd \cdot F_0)$ при $Bi^* = 0.5$ для $\beta = 1, Pd = 1$ (пунктирная кривая), $\beta = 0$ (сплошная кривая).

Продолжим рассмотрение указанного класса задач теплопроводности и рассмотрим следующую модель [2, 3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0; \quad (33)$$

не ограничивает общности рассуждения. Решение уравнения (33) записывается в виде

$$T(x, t)|_{t=0} = T_0, \quad x \geq 0; \quad |T(x, t)| < +\infty, \quad x \geq 0, t \geq 0; \quad (34)$$

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h(t)T(x, t)|_{x=0}, \quad t > 0. \quad (35)$$

и на отрицательной полуоси x в качестве начальной подбирается такая функция $F(x)$, чтобы (36) удовлетворяло граничному условию (35). Последнее приводит к функциональному уравнению вида

Для простоты записи положено $a = 1$, $T_c = 0$, что

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty f(2\sqrt{xt}) \exp(-x) dx = T_0 \gamma(t) + \gamma(t) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \int_0^\infty f(2\sqrt{xt}) x^{-1/2} \exp(-x) dx, \quad (37)$$

где $f(x) = F(-x) - T_0$; $\gamma(t) = h(t)\sqrt{\pi t}$. Если предположить, что функция $h(t)$ разлагается в ряд по степеням $t^{1/2}$, т.е. $\gamma(t) = \sum_{n=0}^\infty \gamma_n t^{n/2}$, и искать функцию $f(x)$ в виде ряда $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, то уравнение (37) дает для коэффициентов со-

$$\text{отношение } a_n = \frac{T_0 \gamma_n \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) a_m \frac{\gamma_{n-m}}{\sqrt{\pi}}}{2^{n-1} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}, \quad \text{а вместе с этим решение } T(x, t) \text{ в виде}$$

$$T(x, t) = T_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^\infty \xi^n \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] d\xi. \quad (38)$$

Метод последовательных приближений для уравнения $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ с начальным условием (34) и граничным условием $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h(t)[T(0, t) - \varphi(t)]$ дает решение задачи в другом виде

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{A(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right] d\tau, \quad (39)$$

$$A(t) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)^{n+1} \int_0^t \frac{h(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\tau \frac{h(\tau_1)}{\sqrt{\tau-\tau_1}} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \frac{h(\tau_n) \varphi(\tau_n)}{\sqrt{\tau_{n-1}-\tau_n}} d\tau_n.$$

Для ограниченной на отрезке $[0, t]$ функции $h(t)$ ряд (39) сходится абсолютно и равномерно при всех $x > 0$ и $t > 0$ в любом конечном промежутке изменения и допускает ряд представляющих интерес частных случаев. Так, для $h(t) = h_0 t^m$, $\varphi(t) = T_c t^r$, где m, r – действительные числа, выражение (39) принимает вид

$$T(x, t) = \frac{T_c x}{2\sqrt{a\pi}} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \left(h_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}}\right)^n \prod_{k=1}^n B\left(r + \frac{1}{2} + k\left(m + \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{\tau^{r+n(m+1/2)}}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau, \quad (40)$$

где $B(c, d)$ – бета-функция, и предполагается, что $[r + 1/2 + k(m + 1/2)] > 0$. При $m = -(1/2)$, т.е. $h(t) = h_0 t^{-1/2}$ и $r = 0$, выражение (40) дает компактное решение

$$T(x, t) = T_c \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} (h_0 \sqrt{a\pi})^n = \frac{T_c h_0 \sqrt{a\pi}}{1 + h_0 \sqrt{a\pi}} \Phi^*\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

при условии, что $h_0 \sqrt{a\pi} < 1$. Аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи. Например, в (33)-(35) при рассмотрении вопроса о нестационарном охлаждении термоэлектрических элементов [3] можно указать два случая для $h(t)$ допускающих точное решение задачи. С

помощью замены переменных $\xi = xh(t)$, $T(x, t) = W(\xi, t)$ и далее преобразования Гринберга

$$W(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}} \exp\left[-\frac{y(t)y''(t)}{4}\xi^2\right] \theta(\xi, t)$$

задача (33)-(35) перейдет в следующую:

$$y^2(t) \partial \theta / \partial t = \partial^2 \theta / \partial \xi^2 + (1/4) y^3(t) y''(t) \xi^2 \theta(\xi, t), \xi > 0, t > 0,$$

$$\theta(\xi, 0) = T_0 \sqrt{y(0)} \exp \left[(1/4) y(0) y''(0) \xi^2 \right], \xi \geq 0,$$

$$(\partial \theta / \partial \xi - \theta)_{\xi=0}, t > 0, |\theta(\xi, t)| < \infty, \xi \geq 0, t \geq 0, y^2(t) = h^{-2}(t).$$

Рассмотрим два случая, допускающих точное решение:

а) $y''(t) = 0 \rightarrow y(t) = At + B \rightarrow h(t) = 1 / (At + B)$

в) $y''(t) y^3(t) = -\beta^2 \rightarrow y(t) = \sqrt{(At + \beta)^2 - AB^2} \rightarrow h(t) = 1 / y(t).$

Доведение решения задачи до конца и построение соответствующих температурных номограмм оставляем на усмотрение читателя. Последнее представляло бы интерес для многих практических приложений.

Таким образом, приведенные подходы дают разные функциональные выражения для первых слагаемых бесконечного ряда последовательных приближений и лишь для небольшого числа частных зависимостей $h(t)$ в (35) можно получить аналитическое решение задачи в замкнутой форме. Расширение класса такого рода зависимостей $h(t)$ представляет собой одну из открытых проблем аналитической теории теплопроводности для краевых задач нестационарного тепло- и массопереноса с переменным во времени относительным коэффициентом теплообмена (массообмена).

Список литературы:

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 601 с.
2. Карташов Э.М. // Инж.-физ. журнал. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
4. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Изд-во URSS, 2012. 653 с.
5. Аттетков А.В., Волков И.К. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 1998. № 1. С. 40–48.

References:

1. Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti (Theory of thermal conductivity). M.: Vysshaya shkola, 1967. 601 p.
2. Kartashov Eh.M. // Engineering.-physical. journal. 2001. V. 74. № 2. P. 171–195.
3. Kartashov Eh.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel (Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids). M.: Vysshaya shkola, 2001. 540 p.
4. Kartashov Eh.M., Kudinov V.A. Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoy termouprugosti. M.: Izd-vo URSS, 2012. 653 s.
5. Attetkov A.V., Volkov I.K. // Bull. MGTU named. N.Eh. Bauman. Ser. Natural Sciences. 1998. № 1. P. 40–48.