УДК 533

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ В ТЕОРИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭНСКОГА

Б.В. Алексеев@, заведующий кафедрой, И.В. Овчинникова, доцент

Кафедра физики МИТХТ им. М.В.Ломоносова,
Москва, 119571 Россия
@Автор для переписки, e-mail: boris.vlad.alexeev@gmail.com

Изучены асимптотические решения нелокальных релятивистских гидродинамических уравнений. Получены решения этой системы уравнений в предельном случае движения безмассовых частиц со скоростью света. Рассмотрен предельный переход нелокальных релятивистских уравнений к кинетическим нерелятивистским нелокальным уравнениям Алексеева.

Ключевые слова: *нелокальная релятивистская гидродинамика, уравнения Алексеева, уравнения Энскога.*

LIMIT CASES IN THE THEORY OF THE NON-LOCAL RELATIVISTIC ENSKOG EQUATIONS

B.V. Alexeev@, I. V. Ovchinnikova

M.V. Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies,
Moscow, 119571 Russia
@Corresponding author e-mail: boris.vlad.alexeev@gmail.com

Asymptotic solutions of the non-local relativistic hydrodynamic equations are investigated. Solutions of the mentioned system of equations were found for the limit case of the photon motion. The limit transfer of the non-local relativistic equations to the non-relativistic non-local Alexeev equations is considered.

Keywords: *non-local relativistic hydrodynamics, Alexeev equations, Enskog equations.*

1. Введение

Нелокальная кинетическая и гидродинамическая теория создана в работах Б.В. Алексеева [1–5]. Релятивистское обобщение этой теории было использовано для рассмотрения различных модельных физических задач, в частности, распространения гармонических волн малой амплитуды, а также ударных волн в релятивистской среде, столкновения нуклонов в коллайдере [6–10]. Представляет интерес анализ нелокальных релятивистских гидродинамических уравнений в предельных случаях теории:

А) движение безмассовых частиц (например, фотонов) со скоростью, равной скорости света.

Б) Предельный переход релятивистских нелокальных гидродинамических уравнений в нелокальную нерелятивистскую форму [1–5] уравнений Алексеева. Обычно нерелятивистские локальные гидродинамические уравнения, содержащие в неявной форме тензорные моменты скорости, называют уравнениями Энскога [11–17]. Далее мы используем термин «уравнения Энскога» и в общем случае нелокальной релятивистской теории с целью максимального сохранения принятой терминологии.

2. Нелокальное релятивистское уравнение и система нелокальных релятивистских гидродинамических уравнений Энскога

В основе нелокальной релятивистской кинетической теории лежит нелокальное релятивистское кинетическое уравнение, [6–8]:

$$\left(p^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+m_0K^{\alpha}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}}\right)-\left(p^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+m_0K^{\alpha}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}}\right)\frac{\tau_0}{m_0}\left(p^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}+m_0K^{\beta}\frac{\partial}{\partial p^{\beta}}\right)f=J^{B,rel}_{INV} \tag{2.1}$$

Как обычно, по повторяющимся индексам идет суммирование, α, β = 0,1,2,3. В уравнении (2.1) использованы следующие обозначения: f – одночастичная функция распределения, $x^{\alpha}=\left(x^0,x^1,x^{,2},x^{,3}\right)=\left(ct,x^1,x^{,2},x^{,3}\right)$ – 4–радиус-вектор частицы; $p^{\alpha}=\left(m_0c\gamma,m_0v^1\gamma,m_0v^{,2}\gamma,m_0v^{,3}\gamma\right)$ – 4–вектор импульса частицы;

m_0 – масса покоя частицы; v^1, v^2, v^3 – компоненты скорости частицы; v – модуль скорости частицы; $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

В кинетическое уравнение (2.1) введен 4–вектор силы

$$K^\alpha = \left(\frac{F^i p^i}{m_0 c}, \frac{F^1 p^0}{m_0 c}, \frac{F^{,2} p^0}{m_0 c}, \frac{F^{,3} p^0}{m_0 c} \right), \tag{2.2}$$

где

$$F^i = m_0 F^{(1)i} + q e_{ijk} v^j B^k \tag{2.3}$$

есть сила, действующая на единицу массы частицы, $B^k = B^k(x^\alpha)$ – магнитная индукция, $q e_{ijk} v^j B^k = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})^i$ – сила Лоренца, q – заряд частицы, i, j, k=1, 2, 3; $e_{ijk} = 0$ при $i = j$, $i = k$ или $j = k$, $e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$, $e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1$. Укажем также, что в (2.1) $J_{INV}^{B,rel}$ – инвариантный релятивистский интеграл столкновений, а τ_0 – инвариантный параметр нелокальности (в простейшем случае собственное время движения частицы между столкновениями).

Обобщенное релятивистское уравнение (2.1) инвариантно относительно преобразований Лоренца. Макроскопическое описание релятивистского газа основано на вычислении моментов функции распределения, определяемых тензорами [18,19]

$$T^{\alpha\beta\ldots\gamma\delta} = c\int p^\alpha p^\beta \ldots p^\gamma p^\delta f \frac{d^3 p}{p^0} \quad , \quad \alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta = 0,1,2,3. \tag{2.4}$$

Момент первого порядка – это 4–вектор потока частиц

$$N^\alpha = c\int p^\alpha f \frac{d^3 p}{p_0}, \tag{2.5}$$

момент второго порядка – тензор энергии – импульса

$$T^{\alpha\beta} = c\int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3 p}{p^0}, \tag{2.6}$$

и так далее.

Для получения уравнений неразрывности, движения и энергии уравнение (2.1) умножается на cm_0, $cp^l (l=1,2,3)$, $cp^0 = mc^2$ соответственно и интегрируется по $d^3 p/p^0$. Известно, что $d^3 p/p^0$ является скалярным инвариантом относительно преобразований Лоренца [18]. При интегрировании моменты интеграла столкновений обращаются в нуль [18]. Введем обозначения:

4–мерный вектор средней силы, действующей на единицу массы

$$T^{K,\alpha} = c\int K^\alpha f \frac{d^3 p}{p^0}; \tag{2.7}$$

четырехмерный тензор 2 ранга

$$T^{Kp,\alpha\beta} = c\int K^\alpha p^\beta f \frac{d^3 p}{p^0}; \tag{2.8}$$

четырехмерный тензор 1 ранга

$$T^{\frac{\partial K}{\partial x} p,\alpha} = c\int \frac{\partial K^\alpha}{\partial x^\beta} p^\beta f \frac{d^3 p}{p^0}; \tag{2.9}$$

четырехмерный тензор 1 ранга

$$T^{\frac{\partial K}{\partial p} K,\alpha} = c\int \frac{\partial K^\alpha}{\partial p^\beta} K^\beta f \frac{d^3 p}{p^0}. \tag{2.10}$$

В результате система обобщенных релятивистских уравнений Энскога имеет вид [6–8]:

уравнение неразрывности

$$m_0 \frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tau_0 \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\right) + m_0 \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tau_0 T^{K,\alpha}\right) = 0, \tag{2.11}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial T^{l\alpha}}{\partial x^\alpha} - m_0 T^{K,l} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\tau_0}{m_0}\frac{\partial T^{l\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tau_0 T^{Kp,\alpha l}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tau_0 T^{Kp,l\alpha}\right) + \tau_0 \frac{\partial T^{Kp,l\alpha}}{\partial x^\alpha} - \tau_0 T^{\frac{\partial K}{\partial x} p,l} - \tau_0 m_0 T^{\frac{\partial K}{\partial p} K,l} = 0. \tag{2.12}$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} - m_0 T^{K,0} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\tau_0}{m_0}\frac{\partial T^{0\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tau_0 T^{Kp,\alpha 0}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\tau_0 T^{Kp,0\alpha}\right) + \tau_0 \frac{\partial T^{Kp,0\alpha}}{\partial x^\alpha} - \tau_0 T^{\frac{\partial K}{\partial x} p,0} - \tau_0 m_0 T^{\frac{\partial K}{\partial p} K,0} = 0. \tag{2.13}$$

Для последующих приложений эти уравнения можно переписать, переходя к трехмерным координатам x^i и времени t:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left\{ m_0 N^0 - \tau_0 \left[\frac{\partial T^{00}}{c\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} - m_0 T^{K,0} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{ m_0 N^i - \tau_0 \left[\frac{\partial T^{0i}}{c\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} - m_0 T^{K,i} \right] \right\} = 0, \tag{2.14}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left\{T^{l0}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{l00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{li0}}{\partial x^i}-m_0T^{Kp,0l}-m_0T^{Kp,l0}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{T^{li}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{li0}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{lij}}{\partial x^j}-m_0T^{Kp,il}-m_0T^{Kp,li}\right]\right\}-m_0T^{K,l}+$$
$$+\tau_0\left(\frac{\partial T^{Kp,l0}}{\partial ct}+\frac{\partial T^{Kp,li}}{\partial x^i}-T^{\frac{\partial K}{\partial x}p,l}-m_0T^{\frac{\partial K}{\partial p}K,l}\right)=0 \quad (2.15)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left\{T^{00}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{000}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{00i}}{\partial x^i}-2m_0T^{Kp,00}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{T^{0i}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{00i}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0ij}}{\partial x^j}-m_0\left(T^{Kp,i0}+T^{Kp,0i}\right)\right]\right\}-$$
$$-m_0T^{K,0}+\tau_0\left(\frac{\partial T^{Kp,00}}{\partial ct}+\frac{\partial T^{Kp,0i}}{\partial x^i}-T^{\frac{\partial K}{\partial x}p,0}-m_0T^{\frac{\partial K}{\partial p}K,0}\right)=0 \quad (2.16)$$

3. Предельный переход к нерелятивистским нелокальным уравнениям Энскога

Перепишем систему уравнений (2.14 – 2.16) в форме, удобной для перехода нерелятивистскому пределу. Введем определения для числовой плотности частиц

$$n=\int fd^3p \quad (3.1)$$

и массовой плотности

$$\rho=m_0\int fd^3p\,. \quad (3.2)$$

Средние значения определяются как

$$\overline{\psi}=\int\psi fd^3p\,. \quad (3.3)$$

Получим из (2.14) – (2.16):

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{\gamma v^i}\right)-\frac{1}{c^2}\rho\left(\mathbf{F}^{(1)}\cdot\overline{\mathbf{v}}\right)\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho\overline{v^i}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{\gamma v^iv^j}\right)-\rho F^{(1)i}-\frac{q}{m_0}\rho\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^i\right]\right\}=0\,, \quad (3.4)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\overline{\gamma v^l}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma^2v^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{\gamma^2v^iv^l}\right)-F^{(1)l}\rho\overline{\gamma}-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\gamma(\mathbf{v}}\times\mathbf{B})^l-F^{(1)i}\frac{1}{c^2}\rho\overline{\gamma v^iv^l}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho\overline{\gamma v^iv^l}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma^2v^iv^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{\gamma^2v^iv^jv^l}\right)-F^{(1)l}\rho\overline{\gamma v^i}-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\gamma\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^lv^i}-F^{(1)i}\rho\overline{\gamma v^l}-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\gamma\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^iv^l}\right]\right\}-$$
$$-\frac{q}{m_0}\left(\left\{\rho\mathbf{v}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma\mathbf{v}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{\gamma v^i\mathbf{v}}\right)-\rho\mathbf{F}^{(1)}-\frac{1}{c^2}F^{(1)i}\rho\overline{v^i\mathbf{v}}-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right]\right\}\times\mathbf{B}\right)^l- \quad (3.5)$$
$$-F^{(1)l}\left(\rho-\tau_0\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{\gamma})+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{\gamma v^i}\right)-\frac{F^{(1)i}\rho\overline{v^i}}{c^2}\right)\right)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\overline{\gamma}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{\gamma^2v^i}\right)-2\frac{F^{(1)i}}{c^2}\rho\overline{\gamma v^i}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho\overline{\gamma v^i}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma^2v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{\gamma^2v^iv^j}\right)-\frac{1}{c^2}\rho\overline{\gamma v^iv^j}F^{(1)j}-\rho\frac{\overline{\gamma F^i}}{m_0}\right]\right\}- \quad (3.6)$$
$$-\left\{\frac{\rho F^{(1)i}\overline{v^i}}{c^2}-\frac{\tau_0}{c^2}F^{(1)i}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\gamma v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{\gamma v^iv^j}\right)-\rho F^{(1)i}-qn\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^i\right]\right\}=0$$

В нерелятивистском пределе, то есть при $v << c, \gamma \approx 1$ уравнение неразрывности (3.4) совпадает с известным нелокальным нерелятивистским уравнение неразрывности Алексеева [1–3]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho-\tau_0\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{v^i}\right)\right]\right\}+\\&+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho\overline{v^i}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{v^i v^j}\right)-\rho F^{(1)i}-\frac{q}{m_0}\rho\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^i\right]\right\}=0\end{aligned}\tag{3.7}$$

Отметим, что в первом приближении ($v << c, \gamma \approx 1$) уравнение энергии (3.6) совпадает с уравнением (3.7).

В первом приближении из (3.5) получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\overline{v^l}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{v^i v^l}\right)-F^{(1)l}\rho-\frac{q}{m_0}\rho\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^l\right]\right\}+\\&+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho\overline{v^i v^l}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v^i v^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{v^i v^j v^l}\right)-F^{(1)l}\rho\overline{v^i}-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^l v^i}-\right.\right.\\&\left.\left.-F^{(1)i}\rho\overline{v^l}-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)^i v^l}\right]\right\}-\frac{q}{m_0}\left(\left\{\rho\mathbf{v}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\mathbf{v}}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{v^i\mathbf{v}}\right)-\rho\mathbf{F}^{(1)}-\right.\right.\right.\\&\left.\left.\left.-\frac{q}{m_0}\rho\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right]\right\}\times\mathbf{B}\right)^l-F^{(1)l}\left(\rho-\tau_0\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\overline{v^i}\right)\right)\right)\end{aligned}\tag{3.8}$$

что совпадает с известным нелокальным нерелятивистским уравнением движения Алексеева [1–3].

Для получения нерелятивистского уравнения энергии надо использовать следующее приближение, поскольку уравнение энергии является уравнением второго порядка по скорости. Разложим γ и γ^2 в ряд:

$$\gamma\approx 1+\frac{v^2}{2c^2},\quad \gamma^2\approx 1+\frac{v^2}{c^2}\ .\tag{3.9}$$

Из уравнения энергии (3.6) имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho c^2+\frac{\rho\overline{v^2}}{2}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c^2+\rho\overline{v^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho c^2\overline{v^i}+\rho\overline{v^2 v^i}\right)-2F^{(1)i}\rho\overline{v^i}\right]\right\}+\\&+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho c^2\overline{v^i}+\rho\frac{\overline{v^2 v^i}}{2}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c^2\overline{v^i}+\rho\overline{v^2 v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho c^2\overline{v^i v^j}+\rho\overline{v^2 v^i v^j}\right)-\right.\right.\\&\left.\left.-\rho\overline{v^i v^j}F^{(1)j}-\frac{\rho}{m_0}\overline{F^i c^2}-\rho\frac{\overline{F^i v^2}}{2m_0}\right]\right\}-\left\{\rho F^{(1)i}\overline{v^i}-\tau_0F^{(1)i}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{v^i v^j}\right)-\rho F^{(1)i}-qn\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^i\right]\right\}=0\end{aligned}\tag{3.10}$$

Рассмотрим также второе приближение для уравнения неразрывности (3.4). Получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho c^2-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c^2+\rho\frac{\overline{v^2}}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho c^2\overline{v^i}+\rho\frac{\overline{v^2 v^i}}{2}\right)-\rho\left(\mathbf{F}^{(1)}\cdot\overline{\mathbf{v}}\right)\right]\right\}+\\&+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho c^2\overline{v^i}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c^2\overline{v^i}+\rho\frac{\overline{v^2 v^i}}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho c^2\overline{v^i v^j}+\rho\frac{\overline{v^2 v^i v^j}}{2}\right)-\rho c^2F^{(1)i}-\frac{q}{m_0}\rho c^2\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^i\right]\right\}=0\end{aligned}\tag{3.11}$$

Разность уравнений (3.10) и (3.11) дает нелокальное нерелятивистское уравнение энергии [1-3] без учета внутренней энергии:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho\overline{v^2}}{2}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\overline{v^2}}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\rho\overline{v^2 v^i}}{2}\right)-F^{(1)i}\rho\overline{v^i}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\rho\frac{\overline{v^2 v^i}}{2}-\tau_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\overline{v^2 v^i}}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\rho\overline{v^2 v^i v^j}}{2}\rho\right)-\right.\right.\\ \left.\left.-\rho\overline{v^i v^j}F^{(1)j}-\rho\frac{\overline{F^i v^2}}{2m_0}\right]\right\}-\left\{\rho F^{(1)i}\overline{v^i}-\tau_0 F^{(1)i}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\overline{v^i v^j}\right)-\rho F^{(1)i}-qn\left(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right)^i\right]\right\}=0\end{gathered} \tag{3.12}$$

Таким образом, переход к нерелятивистскому пределу является нетривиальной процедурой. Разность уравнения (2.16) и уравнения (2.14) (умноженного почленно на c), позволяет осуществить прямой переход к нерелятивистскому уравнению энергии; это уравнение можно назвать «модифицированным уравнением энергии»:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{c\partial t}\left\{T^{00}-m_0cN^0-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial}{c\partial t}\left(T^{000}-m_0cT^{00}\right)+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(T^{00i}-m_0cT^{0i}\right)-2m_0T^{Kp,00}+m_0^2cT^{K,0}\right]\right\}+\\ +\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{T^{0i}-m_0cN^i-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial}{c\partial t}\left(T^{00i}-m_0cT^{0i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^{0ij}-m_0cT^{ij}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.-m_0\left(T^{Kp,i0}+T^{Kp,0i}-m_0cT^{K,i}\right)\right]\right\}-m_0T^{K,0}+\tau_0\left(\frac{\partial T^{Kp,00}}{\partial ct}+\frac{\partial T^{Kp,0i}}{\partial x^i}-T^{\frac{\partial K}{\partial x}p,0}-m_0T^{\frac{\partial K}{\partial p}K,0}\right)=0\end{gathered} \tag{3.13}$$

Итак, мы получили нерелятивистский предел нелокальных гидродинамических уравнений.

4. Применение нелокальных релятивистских уравнений к движению безмассовых частиц со скоростью, равной скорости света

Второй предельный случай релятивистской нелокальной теории соответствует движению частиц, не обладающих массой покоя. Пусть на частицы не действуют внешние силы. Это предположение является естественным при рассмотрении таких частиц, как фотоны. Тогда система релятивистских уравнений Энскога (2.14 – 2.16) принимает вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left\{N^0-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{N^i-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{0i}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}\right]\right\}=0\ , \tag{4.1}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left\{T^{l0}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{l00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{li0}}{\partial x^i}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{T^{li}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{li0}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{lij}}{\partial x^j}\right]\right\}=0\ , \tag{4.2}$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left\{T^{00}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{000}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{00i}}{\partial x^i}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{T^{0i}-\frac{\tau_0}{m_0}\left[\frac{\partial T^{00i}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0ij}}{\partial x^j}\right]\right\}=0\ . \tag{4.3}$$

Пусть теперь масса покоя m_0 стремится к нулю и, соответственно, $\frac{\tau_0}{m_0}\to\infty$. Тогда в уравнениях (4.1 – 4.3) локальными членами можно пренебречь, и мы получаем:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\partial T^{00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i}\right]+\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial T^{0i}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}\right]=0\,, \tag{4.4}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\partial T^{l00}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{li0}}{\partial x^i}\right]+\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial T^{li0}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{lij}}{\partial x^j}\right]=0\,, \tag{4.5}$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\partial T^{000}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{00i}}{\partial x^i}\right]+\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial T^{00i}}{c\partial t}+\frac{\partial T^{0ij}}{\partial x^j}\right]=0\,. \tag{4.6}$$

Рассмотрим функцию распределения частиц в некоторой системе отсчета в виде

$$f = n\delta\left(p^x - \tilde{p}^x\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right), \tag{4.7}$$

то есть частицы движутся в одном направлении (например, вдоль оси x) с одинаковым импульсом $\tilde{p}^x$. Концентрация частиц n может зависеть от координат и времени.

Для частиц с массой покоя, равной нулю, имеем

$$p^0 = \sqrt{m_0^2c^2 + \mathbf{p}^2} = |\mathbf{p}|. \tag{4.8}$$

Тогда для частиц, движущихся по оси x,

$$\tilde{p}^0 = \tilde{p}^x = \frac{h\tilde{\nu}}{c}, \tag{4.9}$$

где $h\tilde{\nu}$ –энергия соответствующего кванта, $\tilde{\nu}$ –частота.

Введенная δ-функция распределения не равновесна и не инвариантна относительно преобразований Лоренца. В оптике известен эффект Допплера, заключающейся в изменении частоты световых волн, воспринимаемых наблюдателем, вследствие взаимного движения наблюдателя и источника (то есть частота света $\tilde{\nu}$ изменяется при переходе в другую систему отсчета)[20].

Используя (4.7) и (4.8), найдем компоненты тензоров, входящих в систему гидродинамических уравнений (4.4 – 4.6):

$$N^0 = c\int p^0 f\frac{d^3p}{p_0} = c\int p^0 n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p^0} = cn, \tag{4.10}$$

$$N^x = c\int p^x f\frac{d^3p}{p_0} = c\int p^x n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p_0} = cn, \tag{4.11}$$

$$N^y = c\int p^y f\frac{d^3p}{p_0} = c\int p^y n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p^0} = 0. \tag{4.12}$$

Аналогично находим

$$N^z = 0; \tag{4.13}$$

$$T^{00} = c\int p^0p^0 f\frac{d^3p}{p^0} = c\int p^0p^0 n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p^0} = cn\tilde{p}^0, \tag{4.14}$$

$$T^{0x} = T^{x0} = c\int p^0p^x f\frac{d^3p}{p^0} = c\int p^0p^x n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p^0} = cn\tilde{p}^0, \tag{4.15}$$

$$T^{xx} = c\int p^xp^x f\frac{d^3p}{p^0} = c\int p^xp^x n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p^0} = cn\tilde{p}^0, \tag{4.16}$$

остальные компоненты тензора $T^{\alpha\beta}$ равны нулю. Далее

$$T^{000} = c\int p^0p^0p^0 f\frac{d^3p}{p^0} = c\int p^0p^0p^0 n\delta\left(p^x - \tilde{p}^0\right)\delta\left(p^y\right)\delta\left(p^z\right)\frac{d^3p}{p^0} = cn\left(\tilde{p}^0\right)^2, \tag{4.17}$$

аналогично

$$T^{xx0} = T^{0xx} = T^{x0x} = T^{xxx} = T^{00x} = T^{x00} = T^{0x0} = T^{xxx} = cn\left(\tilde{p}^0\right)^2, \tag{4.18}$$

остальные компоненты тензора $T^{\alpha\beta\delta}$ равны нулю. Учтем, что $\tilde{p}^0 = \tilde{p}^x = |\tilde{\mathbf{p}}| = \tilde{p}$. Тогда система уравнений (4.4 – 4.6) принимает вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\partial(n\tilde{p})}{\partial t} + \frac{\partial(cn\tilde{p})}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(n\tilde{p})}{\partial t} + \frac{\partial(cn\tilde{p})}{\partial x}\right] = 0, \tag{4.19}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{c\partial t}\left[\frac{\partial(n\tilde{p}^2)}{\partial t} + \frac{\partial(cn\tilde{p}^2)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(n\tilde{p}^2)}{\partial t} + \frac{\partial(cn\tilde{p}^2)}{\partial x}\right] = 0. \tag{4.20}$$

Уравнение движения по оси x для безмассовых частиц, движущихся вдоль этой оси, совпадает с уравнением энергии. Преобразуем (4.19), (4.20):

$$\frac{\partial^2(cn\tilde{p})}{c^2\partial t^2}+\frac{2}{c}\frac{\partial^2(cn\tilde{p})}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2(cn\tilde{p})}{\partial x^2}=0, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial^2(cn\tilde{p}^2)}{c^2\partial t^2}+\frac{2}{c}\frac{\partial^2(cn\tilde{p}^2)}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2(cn\tilde{p}^2)}{\partial x^2}=0. \tag{4.22}$$

Уравнения (4.21) и (4.22) имеют одинаковую структуру. Решим, например, уравнение (4.21). Перепишем (4.21) в виде:

$$a_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}+a_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0, \tag{4.23}$$

где

$$a_{11}=1, a_{12}=1/c, a_{22}=1/c^2,\ f=cn\tilde{p}. \tag{4.24}$$

Уравнение (4.23) можно привести к канонической форме [21]. Поскольку дискриминант $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}=0$, мы имеем уравнение параболического типа с характеристическим уравнение

$$a_{11}(dt)^2-2a_{12}dtdx+a_{22}(dx)^2=0 \tag{4.25}$$

Так как Δ=0, характеристическое уравнение имеет только одно решение

$$\frac{dt}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{1}{c}. \tag{4.26}$$

В результате для приведения (4.23) к канонической форме можно выбрать следующие независимые переменные:

$$\xi=x-ct,\ \zeta=t. \tag{4.27}$$

Отметим, что полученные при этом решения не исчерпывают всех возможных решений уравнения (4.23).

Используя (4.27), находим

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}, \tag{4.28}$$

аналогично находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial f}{\partial t}=-c\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \zeta},\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-2c\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \zeta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}=-c\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \zeta}. \tag{4.29}$$

После подстановки этих производных в (4.23) получаем

$$\frac{1}{c^2}\left[c^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-2c\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \zeta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right]+\frac{2}{c}\left[-c\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \zeta}\right]+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=0, \tag{4.30}$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}=0, \tag{4.31}$$

откуда

$$f=C_1\Phi(\xi)+C_2\Psi(\xi)\zeta, \tag{4.32}$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные, а $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ есть произвольные функции, конкретный вид которых определяется спецификой задачи. Так, поток энергии имеет вид

$$cn\tilde{p}=C_1\Phi(x-ct)+tC_2\Psi(x-ct). \tag{4.33}$$

Аналогичный вид имеет решение уравнения (4.22):

$$cn\tilde{p}^2=C_3\Phi_1(x-ct)+tC_4\Psi_1(x-ct). \tag{4.34}$$

Решения (4.33), (4.34) имеют волновой характер, причем фазовая скорость волн, как и следовало ожидать, равна скорости света. Мы видим также из (4.32), что

$$\frac{\partial f}{\partial t}=C_2\Psi(x-ct). \tag{4.35}$$

В частности, для решения (4.33) это означает, что не только поток энергии, но и производная по времени от потока энергии имеет волновой характер.

Замена переменных в форме $\xi_1=-x+ct$, $\zeta=t$ приводит вновь к уравнению (4.31) и решению в форме

$$f=C_1\Phi(\xi_1)+C_2\Psi(\xi_1)\zeta. \tag{4.36}$$

5. Заключение

Таким образом, система нелокальных релятивистских гидродинамических уравнений Энскога в асимптотических пределах приводит к решениям, имеющих прозрачный физический смысл как для движения с малыми скоростями, так и для движения со скоростью, равной скорости света. Нелокальные релятивистские гидродинамические уравнения в пределе малых скоростей переходят в обобщенные нерелятивистские гидродинамические уравнения Алексеева, однако этот переход не является тривиальным и имеет некоторые математические особенности.

При рассмотрении движения безмассовых частиц (фотонов) с заданной энергией в определенном направлении решения системы нелокальных релятивистских уравнений имеют характер волн, распространяющихся с фазовой скоростью, равной скорости света.

Список литературы:

1. Alexeev B.V. // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1994. V. 349. P. 417–443.
2. Alexeev B.V. // Physica A . 1995. V. 216. P. 459–468.
3. Alexeev B.V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics. Amsterdam: Elsevier, 2004. 368 c.
4. Alexeev B.V. Unified Non-local Theory of Transport Processes. Amsterdam: Elsevier, 2015. 644 p.
5. Алексеев Б.В. Нелокальная физика. Нерелятивистская теория. Saarbrücken: Lambert, 2011. 499 с.
6. Алексеев Б.В., Овчинникова И.В. Нелокальная физика. Релятивистская теория. Saarbrücken: Lambert, 2011. 406 с.
7. Alexeev B.V., Ovchinnikova I.V. // J. Nanoelectron. Optoelectron. 2010. V. 5. P. 360–373.
8. Alexeev B.V., Ovchinnikova I.V. // J. Nanoelectron. Optoelectron. 2010. V. 5. P. 374–390.
9. Балашов А.И., Овчинникова И.В. // Вестник МИТХТ. 2011. Т. 5.№ 3. С. 91–99.
10. Алексеев Б.В., Михайлов В.В., Овчинникова И.В. // Вестник МИТХТ. 2012. Т. 7. № 4. С. 30–36.
11. Enskog D. The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases: PhD dissertation. Upsala, Sweden: University of Upsala, 1917.
12. Enskog D. // Svensk. Vet. Akad. (Arkiv. f. Math., Ast. och Fys.). 1921. V. 16. P. 1.
13. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд. иностранной литературы, 1960. 510 с.
14. Chapman S. // Phil. Trans. Roy. Soc. 1916. A 216. P. 279–348.
15. Chapman S. // Phil. Trans.Roy. Soc. 1917. A 217. P. 115–197.
16. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд. иностранной литературы, 1961. 929 с.
17. Алексеев Б.В. Математическая кинетика реагирующих газов. М.: Наука. 1982. 424 с.
18. Cercignani C., Kremer G.M. The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2002. 384 c.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
20. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1974. 944 с.
21. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954. 608 с.

References:

1. Alexeev B.V. // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1994. V. 349. P. 417–443.
2. Alexeev B.V. // Physica A . 1995. V. 216. P. 459–468.
3. Alexeev B.V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics. Amsterdam: Elsevier, 2004. 368 c.
4. Alexeev B.V. Unified Non-local Theory of Transport Processes. Amsterdam: Elsevier, 2015. 644 p.
5. Alekseev B.V. Nelokal'naya fizika. Nerelyativistskaya teoriya (Non-local physics. Non-relativistic theory). Saarbrücken: Lambert, 2011. 499 p.
6. Alekseev B.V., Ovchinnikova I.V. Nelokal'naya fizika. Relyativistskaya teoriya. (Non-local physics. Relativistic theory) Saarbrücken: Lambert, 2011. 406 p.
9. Balashov A.I., Ovchinnikova I.V. // Vestnik MITHT. 2011. V. 5.№ 3. P. 91–99.
10. Alekseev B.V., Mikhajlov V.V., Ovchinnikova I.V. // Vestnik MITHT. 2012. V. 7. № 4. P. 30–36.
11. Enskog D. The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases: PhD dissertation. Upsala, Sweden: University of Upsala, 1917.
12. Enskog D. // Svensk. Vet. Akad. (Arkiv. f. Math., Ast. och Fys.). 1921. V. 16. P. 1.
13. Chepmen S., Kauling T. Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov (The mathematical theory of nonuniform gases). M.: Izd. inostrannoj literatury, 1960. 510 p.
14. Chapman S. // Phil. Trans. Roy. Soc. 1916. A 216. P. 279–348.
15. Chapman S. // Phil. Trans.Roy. Soc. 1917. A 217. P. 115–197.
16. Girshfel'der Dzh., Kertiss Ch., Berd R. Molekulyarnaya teoriya gazov i zhidkostej (Molecular theory of gases and liquids). M.: Izd. inostrannoj literatury, 1961. 929 p.
17. Alekseev B.V. Matematicheskaya kinetika reagiruyushchikh gazov (Mathematical kinetics of reacting gases). M.: Nauka. 1982. 424 p.
18. Cercignani C., Kremer G.M. The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2002. 384 c.

19. Landau L.D., Lifshic E.M. Gidrodinamika (Hydrodynamics). M.: Nauka, 1988. 736 p.

20. Yavorskij B.M., Detlaf A.A. Spravochnik po fizike (Handbook of physics). M.: Nauka, 1974. 944 p.

21. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike (Handbook of mathematics). M.: Gos. izd. tekhniko-teoreticheskoj literatury, 1954. 608 p.