УДК 539.3

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Э.М. Карташов[@], профессор, И.В. Антонова, старший преподаватель

Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий),
Кафедра высшей и прикладной математики,
Москва, 119571 Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

Рассмотрены вопросы корректной постановки краевых задач для уравнений гиперболического типа. Развит аналитический метод решения гиперболических моделей переноса для конечных областей канонического типа с обобщением на случай наличия в исходной постановке задачи временных и пространственных неоднородностей. Рассмотрена серия иллюстративных примеров.

Ключевые слова: *модели переноса, гиперболическое уравнение, краевые задачи, аналитические решения.*

HYPERBOLIC MODEL OF NON-STATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY

E.M. Kartashov[@], I.V. Antonova

Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies),
Moscow, 119571 Russia
[@]Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru

The article presents fundamentally new results on the analytical theory of thermal conductivity for hyperbolic transport models. The questions of the correct formulation of boundary value problems are considered. A technique for finding exact analytical solutions of a rather complex class of boundary value problems based on the method of Green's functions and operational calculus is developed.

Keywords: *transport model, a hyperbolic equation boundary, value problems, analytical solutions.*

Введение

Исторически сложилось так, что наиболее распространенной на практике моделью теплопроводности в недеформированных телах явилось линейное градиентное соотношение Фурье $\vec{q}(M,t) = -\lambda gradT(M,t)$. Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел $c\rho\dfrac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -div\vec{q}(M,t) + F(M,t)$ закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса вида

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) + \frac{1}{c\rho}F(M,t),\ M \in D, t > 0, \quad (1)$$

и соответствующим для (1) краевым задачам с начальным и граничным условиями:

$$T(M,t)\big|_{t=0} = \Phi_0(M),\ M \in \overline{D}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} + \beta_2 T(M,t) = \beta_3 \varphi(M,t),\ M \in S, t > 0. \quad (3)$$

Здесь D – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x,y,z)$, S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный в точках S), $\Omega = (M \in D, t > 0)$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x,y,z,t) с основанием D при $t = 0$. Входящие в (1)–(3) параметры – теплофизические характеристики среды, постоянные величины в интервале температур, не выходящих за точки перехода [1, 2]. Краевые функции в (1)–(3) принадлежат классу функций $F(M,t) \in C^0(\overline{\Omega})$, $\Phi_0(M) \in C^1(\overline{\Omega})$ $\varphi(M,t) \in C^0(S \times t \geq 0)$, искомое решение $T(M,t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$; $grad_M T(M,t) \in C^0(\overline{\Omega})$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

Авторами [1] развита серия аналитических методов нахождения точных решений краевых задач

(1)–(3), в частности, в виде следующего интегрального представления при временных и пространственных неоднородностях в исходной постановке задачи:

$$T(M,t)=\iiint_D \Phi_0(P)G(M,t,P,\tau)\big|_{\tau=0}dV_P+a\int_0^t\iint_S\left[G(M,t,P,\tau)\frac{\partial T(P,\tau)}{\partial n_P}-T(P,\tau)\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial n_P}\right]d\tau d\sigma_P+$$
$$+\int_0^t\iiint_D\frac{1}{c\rho}F(P,\tau)G(M,t,P,\tau)d\tau dV_P \tag{4}$$

Здесь $G(M,t,P,\tau)$ – функция Грина для данной области как решение более простой задачи для однородного уравнения (1) с однородными граничными условиями того же типа, что и (3):

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a\Delta_M G(M,t,P,\tau),\ M\in D,t>\tau, \tag{5}$$

$$G(M,t,P,\tau)\big|_{t=\tau}=\delta(M,P),\ (M,P)\in D, \tag{6}$$

$$\beta_1\frac{\partial G(M,t,P,\tau)}{\partial n}+\beta_2 G(M,t,P,\tau)=0,\ M\in S,t>\tau. \tag{7}$$

Для ограниченных областей канонического типа функция Грина G имеет вид:

$$G(M,t,P,\tau)=G(M,t-\tau,P)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n(M)\Psi_n(P)}{\|\Psi_n\|^2}\exp\left[-\left(\sqrt{a}\gamma_n\right)^2(t-\tau)\right], \tag{8}$$

где $\Psi_n(M)$ и γ_n^2 – собственные функции и собственные значения соответствующей для (1)–(3) однородной задачи

$$\begin{cases}\Delta\Psi(M)+\gamma^2\Psi(M)=0, & M\in D,\\ \beta_1\dfrac{\partial\Psi(M)}{\partial n}+\beta_2\Psi(M)=0, & M\in S,\end{cases} \tag{9}$$

$\|\Psi_n\|^2=\iiint_D\Psi_n^2(M)dV_M$ – квадрат нормы собственных функций.

Здесь $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака. На основе решения спектральных задач (9) в [1–3] разработаны Таблицы Карташова (термин, устоявшийся в научной и учебной литературе), позволяющие по достаточно простой схеме выписать точное аналитическое решение тепловой задачи (1)–(3) в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат в виде рядов Фурье – Ханкеля с улучшенной сходимостью вплоть до границы области, что весьма удобно для инженерных расчетов при определении теплофизических характеристик материалов, определении времени прогрева образцов, установлении времени перехода к стационарной фазе при нагревании или охлаждении и т.д.

Несмотря на некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (1)–(4) (отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье и, как следствие, вытекающий из (4) вывод о бесконечной скорости распространения теплоты; сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области $x>0, t>0$ при $x\to 0$, $t\to 0$), последнее не ограничивает область применения краевых задач (1)–(3) как предмет практически необозримого числа исследований, охватывающих все новые содержательные математические объекты и все большее число самых разнообразных аналитических методов, дающих точные аналитические решения задач (1)–(3) [1–3].

Начиная с 30-х годов XX в. развиваются исследования, связанные с изучением распространения теплоты в жидкостях, газах и твердых телах с конечной скоростью ([4] и ссылки в [4]). В 1940 г. Л. Тисса и в 1941 г. независимо от него Л. Ландау указали на возможность существования конечной скорости распространения теплоты υ_T в жидком гелии II (что получило название второго звука – ВЗ). Эти исследования продолжили В. Пешков (1946 г.), показавший, что ВЗ может существовать в чистых твердых телах (было обнаружено, что в кристаллах при $T=3{,}4^0 K$ $\upsilon_T\approx 720$ м/с), Г. Уард и Г. Уилкс (1952 г.), которые предложили формулу для оценки υ_T в твердых телах через измеримые макроскопические параметры ($\upsilon_T\approx\frac{\upsilon_P}{\sqrt{3}}$ в кристаллах, в металлах, υ_P – скорость звука); Р. Дингл (1952 г.) изучал распространение теплоты в диэлектриках, сверхпроводниках и ферромагнетиках, Ф. Лондон (1954 г.) – в металлах и стеклах, С. Акерман, В. Бертман, Н. Фейербенк, Р. Гюйе (1966 г.) – в кристаллическом гелии; М. Честер (1963 г.) рассмотрел второй звук в твердых телах с макроскопической точки зрения и указал на необходимость наличия в уравнении переноса теплоты слагаемого, содержащего скорость υ_T, на основе результатов Максвелла – первого, кто ввел инерционность в уравнения переноса – и Каттанео, предложившего версию закона Фурье с релаксационным членом теплового потока. В 1965 г. С. Калиски [5] установил обобщенный закон теплопроводности, введя в принцип Онзагера характеристику скорости изменения теплового потока – тепловую инерцию.

Практически одновременно (1965 г.) и независимо для изотропных тел обобщенный закон тепло- и массопереноса установил А.В. Лыков [3] как гипотезу о конечных скоростях распространения теплоты и массы для тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах.

Обобщенную систему уравнений Онзангера запишем в виде

$$\vec{J}(M,t) = L_r \frac{\partial \vec{J}(M,t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N}\left[L_k \vec{X}_k(M,t) + L_k^{'} \frac{\partial \vec{X}_k(M,t)}{\partial t}\right],$$

где $\vec{J}(M,t)-$ поток субстанции (теплоты, массы и т.д.) в области D при $t>0; \vec{X}_k(M,t)-$ термодинамические движущие силы (градиенты температуры, концентрации и т.д.); $L_r, L_k, L_k^{'}-$ кинетические коэффициенты (постоянные феноменологические коэффициенты переноса). Если пренебречь производной по времени от движущей силы $\vec{X}_k$, а также считать, что $\vec{J}(M,t) = \vec{q}(M,t)-$ вектору плотности теплового потока, и при этом $L_r = -\tau_r, \vec{X}_k = q\mathrm{rad}T(M,t), L_k = -\lambda$ (теплопроводность среды) ($N=1$), то приходим к следующему обобщенному закону теплопроводности твердых тел

$$\vec{q}(M,t) = -\lambda gradT(M,t) - \tau_r \frac{\partial \vec{q}(M,t)}{\partial t}, \qquad (10)$$

где τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения теплоты соотношением $\upsilon_T = \sqrt{a/\tau_r}$. Для металлов $\tau_r \approx (10^{-14} - 10^{-11})$ с; для аморфных тел типа неорганического стекла и полимеров, имеющих сложную структуру, $\tau_r \approx (10^{-11} - 10^{-5})$ с (для неорганического стекла $\tau_r \approx 10^{-7}$ с, для органического стекла $\tau_r \approx 10^{-11}$ с); для азота $\tau_r \approx 10^{-9}$ с; опытное измерение τ_r во многих случаях не представляется возможным. Скорость распространения теплоты для стали $\upsilon_T = 1800$ м/с (скорость распространения звука $\upsilon_P = 6100$ м/с); для алюминия $\upsilon_T = 2930$ м/с ($\upsilon_P = 6260$ м/с); для неорганического стекла $\upsilon_T = 2*10^6$ м/с ($\upsilon_P = 4.5*10^3$ м/с); для азота $\upsilon_T = 150$ м/с и для газов в условиях разряженного сверхзвукового потока влияние конечной скорости распространения теплоты на теплообмен становится заметным. Подобное влияние может проявляться также при очень низких температурах (например, в жидком гелии $\upsilon_T = 19$ м/с при $T = 1.4^0 K$) и даже при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени [6]. Уравнение энергии для изотропных твердых тел и соотношение (10) приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа:

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho}\left[\frac{\partial F(M,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r}F(M,t)\right],\ M \in D, t>0. \qquad (11)$$

и соответствующим краевым задачам теплопроводности для уравнения (11) обобщенного вида.

Уравнение (11) было также получено А.С. Предводителевым, но исходя из иных представлений, а именно – из анализа скоростей перемещения изотермических поверхностей с использованием представления Римана, т.е. при полном отказе от релаксационной формулы (10).

Систематические публикации по гиперболическим моделям переноса можно отнести к концу 60-х годов прошлого столетия. Авторы [6] выполнили одну из первых работ, используя модельные представления для уравнения (11) для описания тепловой реакции *T(z, t)* упругого полупространства $z>0$, $t>0$ при температурном нагреве его границы (граничные условия 1 рода). Проанализировав аналитическое решение аналогичной задачи при граничной температуре $T(0,t) = T_0 + \left[\frac{T_C - T_0}{t_0}\right]\left[t - \eta(t-t_0)(t-t_0)\right]$, ($\eta$(z)– функция Хевисайда), А.В. Лыков дал обоснование физического смысла конечной скорости распространения теплоты, представляющей собой производную во времени от глубины проникновения теплоты. Обобщенные задачи переноса значительно отличаются от классических (1)–(3), являясь более сложными при нахождении аналитических решений этих задач. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении точных аналитических решений краевых задач для уравнения (11) и в основном для полуограниченной области $z>0$, $t>0$ (в основной постановке) при постоянных граничных функциях и нулевых граничных условиях [7, 8]. Для областей канонического типа (бесконечная пластина, цилиндр сплошной или полый, шар сплошной или полый и т.д.) точные решения гиперболических моделей переноса до сих пор неизвестны и данная проблема по существу остается открытой, включая вопросы корректной постановки краевых задач для уравнений гиперболического типа. Всем этим вопросам и посвящена настоящая публикация.

1. Краевые условия для гиперболического уравнения теплопроводности. Для уравнения (11) начальные условия могут быть записаны в виде функций общего вида

$$T(M,t)\big|_{t=0} = \Phi_0(M),\ M \in \overline{D} \qquad (12)$$

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Phi_1(M),\ M \in \overline{D} \qquad (13)$$

В зависимости от вида граничных условий для уравнения (11) могут быть рассмотрены:

1-я краевая задача (граничные условия 1 рода)

$$T(M,t)=\varphi_C(M,t),\ M\in S, t>0; \tag{14}$$

2-я краевая задача (обобщенное граничное условие 2 рода)

$$-\lambda\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}=\left(1+\tau_r\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_C(M,t),\ M\in S, t>0 \tag{15}$$

3-я краевая задача (обобщенное граничное условие 3 рода)

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}=-h\left(1+\tau_r\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[T(M,t)-\varphi_C(M,t)\right],\ M\in S, t>0. \tag{16}$$

Функции, входящие в (12)–(16), принадлежат классу функций $\Theta(M,t)\in C^2(\Omega)$; $\Phi_0(M)\in C^1(\overline{D})$; $\Phi_1(M)\in C^0(\overline{D})$; $\varphi_C(M,t)\in C^1(\Omega)$; искомое решение $T(M,t)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$.

Обобщенные граничные условия (15)–(16) записаны в дифференциальной форме, допускающей иную – интегральную форму записи. Последнее возможно лишь при выполнении определенных условий, накладываемых на краевые функции в (12)–(16). Так, для случая (15) можно записать эквивалентное граничное условие 2 рода

$$-\frac{1}{\tau_r}\int_0^t\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\exp\left[-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right]d\tau=\frac{1}{\lambda}\varphi_C(M,t),\ M\in S, t\geq 0, \tag{17}$$

при выполнении равенства $\varphi_C(M,0)=0$, $M\in S$. Для условия (16) имеем эквивалентную интегральную форму записи:

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}\exp\left[-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right]d\tau=-h\left[T(M,t)-\varphi_C(M,t)\right],\ M\in S, t\geq 0 \tag{18}$$

если выполняется условие $\varphi_C(M,0)=\Phi_0(M)$, $M\in\overline{D}$.

2. Аналитические решения. Граничные условия 2 и 3 родов в виде (основных) (15)–(16) показывает, что для второй и третьей краевых задач соответствующие спектральные задачи решены быть не могут, а значит не могут быть применены разработанные на основе решения этих задач Таблицы Карташова интегральных преобразований Фурье – Ханкеля (в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат) при нахождении аналитических решений. Поэтому до сих пор не найдены точные аналитические решения второй, третьей и смешанных краевых задач для областей канонического типа.

Рассмотрим одну из таких задач прикладной термомеханики, представляющей интерес для теории теплового удара [2]. Имеется плоскопараллельный упругий однородный изотропный слой конечной толщины l при свободных от напряжениях границах, занимающий в декартовых координатах область $0\leq x\leq l, -\infty<y,z<+\infty.$ Через поверхность слоя $x=l$ осуществляется теплообмен с внешней средой, температура которой изменяется в начальный момент времени от T_0 до T_c ($T_c>T_0$), оставаясь в дальнейшем постоянной, а поверхность $x=0$ поддерживается при температуре T_0. При $t\leq 0$ температура слоя равна T_0, и скорость нагрева предполагается равной нулю. Математическую модель задачи для уравнения (11) относительно температурной функции $T(x,t)$ (при отсутствии внутренних источников) запишем в безразмерных переменных, полагая:

$$z=x/l;F_0=at/l^2;Bi=hl;c*=a\tau_r/l^2;W(z,F_0)=\frac{T(x,t)-T_0}{T_c-T_0}$$

Имеем следующую гиперболическую модель нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial W}{\partial F_0}=\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-c*\frac{\partial^2 W}{\partial F_0^2},\qquad 0<z<1, F_0>0, \tag{19}$$

$$W\Big|_{F_0=o}=\frac{\partial W}{\partial F_0}\Big|_{F_0=0}=0,\qquad 0\leq z\leq 1, \tag{20}$$

$$W\big|_{z=0}=0,\quad F_0>0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}\Big|_{z=1}=-Bi(1+c*\frac{\partial}{\partial F_0})(W\big|_{z=1}-1),\quad F_0>0. \tag{22}$$

В пространстве изображений по Лапласу $\overline{W}(z,p)=\int_0^\infty W(z,F_0)\exp(-pF_0)dF_o$ решение задачи (19)–(22) имеет вид:

$$\overline{W}(z,p)=\frac{Bish\sqrt{\gamma}z}{\sqrt{\gamma}(pch\sqrt{\gamma}+Bi\sqrt{\gamma}sh\sqrt{\gamma})}, \tag{23}$$

где $\sqrt{\gamma}=\sqrt{c*p^2+p}.$ Выражения типа (23) являются типичными изображениями для гиперболических моделей переноса после применения к (19)–(22) преобразования Лапласа. Переход к оригиналу в (23) связан с длительными преобразованиями, поэтому остановимся лишь на главных моментах перехода. Используя соотношение [1]

$$\gamma_1 sh\sqrt{\gamma}+\gamma_2 ch\sqrt{\gamma}=\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\exp(\sqrt{\gamma})\left[1-\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\exp(-2\sqrt{\gamma})\right]$$

преобразуем выражение (23) к виду

$$\bar{W}(z,p)=Bi\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(Bi\sqrt{\gamma}-p)^n}{(Bi\sqrt{\gamma}+p)^{n+1}}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\exp\left[-\alpha_{k,n}(z)\sqrt{\gamma}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p}\frac{(\sqrt{c*+\frac{1}{p}}-1/Bi)^n}{\sqrt{c*+\frac{1}{p}}+1/Bi)^{n+1}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{c*}\sqrt{p(p+1/c*)}}\exp\left[-\alpha_{kn}(z)\sqrt{c*}\sqrt{p(p+1/c*)}\right], \tag{24}$$

где $\alpha_{1n}(z)=(2n+1)-z;\alpha_{2n}=(2n+1)+z.$

Оригинал выражения $\bar{W}_1(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{(\sqrt{c*+\frac{1}{p}}-1/Bi)^n}{(\sqrt{c^*+\frac{1}{p}}+1/Bi)^{n+1}}$

находится с использованием следующих соотношений операционного исчисления:

$$\bar{W}_1(p)=\frac{1}{p}\bar{F}(\frac{1}{p})\leftarrow\int_0^{\infty}J_0(2\sqrt{F_0\tau})F(\tau)d\tau,$$

$$\bar{F}(p)=\frac{(\sqrt{c*+p}-1/Bi)^n}{(\sqrt{c*+p}+1/Bi)^{n+1}}\leftarrow\exp(-c*F_0)F_1(F_0)=F(F_0);$$

$$\bar{F}_1(p)=\frac{(\sqrt{p}-1/Bi)^n}{(\sqrt{p}+1/Bi)^{n+1}}=\bar{F}_2(\sqrt{p})\leftarrow\int_0^{\infty}\frac{y}{2\sqrt{\pi}F_0^{3/2}}\exp(-\frac{y^2}{4F_0})F_2(y)dy;$$

$$\bar{F}_2(p)=\frac{(p-1/Bi)^n}{(p+1/Bi)^{n+1}}\leftarrow\exp(-\frac{F_0}{Bi})L_n(\frac{2F_0}{Bi})=F_2(F_0)$$

$$F_1(F_0)=\int_0^{\infty}\frac{y}{2\sqrt{\pi}F_0^{3/2}}\exp(-\frac{y^2}{4F_0}-\frac{y}{Bi})L_n(\frac{2y}{Bi})dy$$

$$F(F_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}F_0^{3/2}}\exp(-c*F_0)\int_0^{\infty}y\exp(-\frac{y^2}{4F_0}-\frac{y}{Bi})L_n(\frac{2y}{Bi})dy.$$

Таким образом:

$$W_1(F_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau^{3/2}}J_0(2\sqrt{F_0\tau})\exp(-c*\tau)d\tau\int_0^{\infty}y\exp(-\frac{y^2}{4\tau}-\frac{y}{Bi})L_n(\frac{2y}{Bi})dy. \tag{25}$$

Здесь: $J_0(z)-$ функция Бесселя первого рода, нулевого порядка; $L_n(z)-$ полиномы Лагерра.

Оригинал выражения

$$\bar{W}_{k,n}(z,p)=\frac{1}{\sqrt{c*}\sqrt{p(p+1/c*)}}\exp\left[-\alpha_{k,n}(z)\sqrt{c*}\sqrt{p(p+1/c*)}\right]$$

записывается следующим образом:

$$W_{k.n}(z,F_0)=\frac{1}{\sqrt{c*}}\exp(-\frac{F_0}{2c*})I_0(\frac{1}{2c*}\sqrt{F_0^2-c*\alpha_{k,n}^2(z)})\eta\left[F_0-\sqrt{c*}\alpha_{k,n}(z)\right]. \tag{26}$$

Здесь: $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя. Теперь, имея (25) и (26), по теореме о свертке находим точное решение задачи (19)–(22) в виде:

$$W(z,F_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\int_0^{F_0}W_1(\tau')W_{k,n}(z,F_0-\tau')d\tau'. \tag{27}$$

Однако решение (27) может иметь и другую функциональную конструкцию, и здесь отчетливо проявляются особенности гиперболических моделей переноса.

Остановимся кратко на этом вопросе.

Знаменатель функции (23), записанной в виде

$$\frac{\overline{W}(z,p)}{Bi} = \frac{\overline{f}_1(z,p)}{\overline{f}_2(p)} = \frac{shz\sqrt{\gamma}/\sqrt{\gamma}}{pch\sqrt{\gamma} + Bi\sqrt{\gamma}sh\sqrt{\gamma}}, \quad (28)$$

в плоскости p имеет бесчисленное множество нулей (полюсов), определяемых уравнением $p_n ch\sqrt{\gamma_n} + Bi\sqrt{\gamma_n}sh\sqrt{\gamma_n} = 0$, откуда $\sqrt{\gamma_n} = -i\mu_n^2, c*p_n^2 + p_n + \mu_n^2 = 0, p_n = Bi\mu_n tg\mu_n$, при этом

$p_n = -(1/2c*) \pm i\omega_n, \omega_n = \frac{1}{\sqrt{c*}}\sqrt{\mu_n^2 - 1/(4c*)}$, значение $p = 0$ также является полюсом функции (28), а числа $\mu_n > 0$ представляют собой корни уравнения

$$Bi^2 c*\mu_n tg^2\mu_n + Bitg\mu_n + \mu_n = 0 \ . \quad (29)$$

Пользуясь теоремой разложения Ващенко–Захарченко [1] в виде

$$\frac{W(z,F_0)}{Bi} = \frac{\overline{f}_1(z,0)}{\overline{f}_2'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{f}_1(z,p_n)}{\overline{f}_2'(p_n)}\exp(p_n F_0)$$

после длительных преобразований находим оригинал изображения (28) – точное аналитическое решение задачи (19)–(22) в форме, отличной от (26):

$$W(z,F_0) = \frac{Biz}{1+Bi} + 2Bi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi_{1n}\cos\omega_n F_0 + \varphi_{2n}\sin\omega_n F_0)\cos\mu_n \sin\mu_n z}{\varphi_{1n}^2 + \varphi_{2n}^2}\exp(-\frac{F_0}{2c*}) \quad (30)$$

где $\varphi_{1n} = \mu_n\cos^2\mu_n, \varphi_{2n} = (\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n)Bic*\omega_n$.

Применяя изложенные подходы, можно получить точные аналитические решения тепловых задач для уравнения (11) в области $x \in [0,l], t \geq 0$ с граничными условиями любого рода. Однако, если уравнение (11) и краевые условия (12)–(18) содержат временные и пространственные неоднородности достаточно общего вида, технические трудности на пути решения могут стать непреодолимыми. Этих трудностей можно избежать, если объединить метод функции Грина для гиперболических моделей переноса с операционным (что означает первоначальное нахождение соответствующей функции Грина – более простой задачи, а затем искомого решения через его интегральное представление-аналог (4)–(8), но для уравнения (11)). Этот метод разработан автором в [9]. Так, в случае первой краевой задачи в (14) или второй краевой задачи в (15) функция Грина $G(M,t,P,\tau) = G(M,t-\tau,P)$ имеет вид:

$$G(M,t-\tau,P) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n(M)\Psi_n(P)}{\|\Psi_n\|^2\sqrt{(\sqrt{a\tau_r}\gamma_n)^2 - \frac{1}{4}}}\sin\left[\sqrt{(\sqrt{a\tau_r}\gamma_n)^2 - \frac{1}{4}}(\frac{t-\tau}{\tau_r})\right]\exp(-\frac{t-\tau}{2\tau_r}), \quad (31)$$

где $\Psi_n(M)$ и γ_n^2 – собственные функции и собственные значения спектральной задачи (9) соответственно граничным условиям первого или второго рода. Имея результат (31) и интегральное соотношение в [9], нетрудно записать аналитическое решение уравнения (11) с краевыми условиями достаточно общего вида. Заметим, что результаты (26), (30), (31) представлены в печати, по-видимому, впервые.

Приведенные соотношения наглядно демонстрируют трудности нахождения аналитических решений гиперболических моделей переноса, и в этом отношении предстоит большая работа по развитию соответствующего направления аналитической теории теплопроводности твердых тел.

Выводы

Изложены принципиально новые результаты аналитической теории теплопроводности твердых тел, относящиеся к гиперболическим моделям переноса. Показано, что метод функции Грина в сочетании с операционным позволяют получить точные аналитические решения задач в интегральной форме, содержащей все неоднородности в исходной постановке задачи.

Список литературы:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.
2. Карташов Э.М. // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 2. С. 99–127.
3. Карташов Э.М. // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 3. С. 106–125.
4. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2013.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
6. Бауместер К., Хатилл Т. // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112–119.
7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная

термомеханика. Киев: Наукова думка, 1976.

8. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. М.: Едиториал. УРСС, 2004.

9. Карташов Э.М. // Изв. РАН. Энергетика. 2011. № 6. С. 185–195.