

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЧАСТИЧНО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С РАДИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ ТЕПЛОТЫ

Э.М. Карташов

МИРЭА – Российский технологический университет (Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия

@ Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

Развита математическая теория построения интегральных преобразований в частично ограниченной области с радиальным потоком теплоты – массивное тело, ограниченное изнутри цилиндрической полостью. Построены: интегральное преобразование, изображение оператора в правой части уравнения нестационарной теплопроводности, формула обращения для изображения искомой функции. Предложенный подход выгодным образом отличается от классической теории дифференциальных уравнений математической физики построения обобщенных интегральных преобразований, основанной на собственных функциях соответствующих сингулярных задач Штурма–Лиувилля. Разработанный метод основан на операционном решении исходных краевых задач нестационарной теплопроводности с начальной функцией общего вида $L^2(r_0, \infty)$, принадлежащей области $r > r_0$, и однородными граничными условиями и связан с вычислением контурных интегралов Римана–Меллина от изображений, содержащих различные комбинации модифицированных функций Бесселя. Одновременно, для указанной выше области развит метод функций Грина путем построения интегральных представлений аналитических решений первой, второй и третьей краевых задач через неоднородности в исходной постановке задачи (краевые условия, функция источника в исходном уравнении). Сформулированы математические модели для нахождения соответствующих функций Грина и с помощью развитой теории интегральных преобразований выписаны функциональные соотношения всех трех функций Грина, входящих в представленную интегральную формулу. Построенные в статье функциональные соотношения могут быть использованы при рассмотрении многочисленных частных случаев практической теплофизики. Приведены конкретные возможные приложения представленных результатов во многих областях науки и техники.

Ключевые слова: *краевые задачи, интегральные преобразования, частично ограниченная область, функции Грина.*

INTEGRAL TRANSFORMATION IN A PARTIALLY BOUNDED REGION WITH A RADIAL THERMAL FLOW

E.M. Kartashov

MIREA – Russian Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow 119571, Russia

@ Corresponding author e-mail: kartashov@mitht.ru

A mathematical theory is developed for constructing integral transformations in a partially bounded region with a radial heat flow — a massive body bounded from the inside by a cylindrical cavity. Constructed: an integral transformation, the image of the operator on the right side of the equation of unsteady heat conduction, the inversion formula for the image of the desired function. The proposed approach favorably differs from the classical theory of differential equations of mathematical physics for the construction of generalized integral transformations based on the eigenfunctions of the corresponding singular Sturm-Liouville problems. The developed method is based on the operational solution of the initial boundary problems of unsteady heat conduction with an initial function of a general form $L^2(r_0, \infty)$ belonging to the $r > r_0$ region and homogeneous boundary conditions and is associated with the calculation of the Riemann-Mellin contour integrals from images containing various combinations of modified Bessel functions. At the same time, for the above-mentioned region, the method of Green's functions was developed by constructing integral representations of analytical solutions of the first, second and third boundary value problems through inhomogeneities in the initial formulation of the problem (boundary conditions, source function in the initial equation). Mathematical models for finding the corresponding Green's functions are formulated, and functional relations of all three Green functions included in the presented integral formula are written out with the help of the developed theory of integral transformations. The functional relations constructed in the article can be used when considering numerous special cases of practical thermal physics. The specific possible applications of the presented results in many areas of science and technology are given.

Keywords: boundary value problems, integral transformations, partially bounded area, Green functions.

Метод интегральных преобразований, основы которого были заложены в середине прошлого столетия в трудах Г.А. Гринберга, Н.С. Кошлякова, А.В. Лыкова (ссылки в [1]) при решении краевых задач нестационарной теплопроводности и родственных явлений в областях канонического типа (пластина, цилиндр, шар), в последующие годы получил дальнейшее развитие в теоретическом [2, 3] и прикладном отношении [4–6]. Несмотря на достигнутые результаты в этой области, ряд вопросов остаются еще открытыми и требуют дальнейшего рассмотрения. Один из них – построение интегральных преобразований и формул обращений для них для уравнения параболического типа в области $\Omega = (r > r_0, t > 0)$ с радиальным потоком теплоты $T = T(r, t)$.

Исследование тепловой реакции на нагрев или охлаждение массивного тела с внутренней цилиндрической полостью – важный результат для многих приложений, в частности, при изучении температурного режима в стволе нефтяной скважины и зоны оттаивания окружающих многолетнемерзлых пород для диагностики состояния скважин и выбора оптимального режима их эксплуатации; при расчете периодически изменяющихся температур (и соответствующих термических напряжений) в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории волноводов при исследовании влияния величины изменения поперечного сечения цилиндрического проводника на температурную волну в окружающем пространстве; при изучении распространения теплоты от проложенных в земле кабелей и труб; при изучении режима охлаждения шахт и т. д. (ссылки в [7]). Несмотря на практиче-

скую важность в теплофизике, область указанной формы начали изучать сравнительно недавно, и к настоящему времени соответствующий математический аппарат в теории интегральных преобразований развит совершенно недостаточно. Отдельные простейшие случаи при постоянных условиях нагрева изучал Николсон, однако его аргументацию нельзя считать безупречной; Титчмарш использовал интеграл Фурье-Ханкеля для первой краевой задачи; Смит применил метод контурных интегралов для постоянных условий первой краевой задачи; Фатыхов и Смирнов использовали обобщенное интегральное преобразование Вебера для второй краевой задачи (ссылки в [8]); Аттетков и Волков анализировали собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для построения теории при решении третьей краевой задачи [9]; Карташов рассмотрел теорию интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности в Ω (пластина, цилиндр, шар) [10], однако результат автора для третьей краевой задачи требует уточнения.

Специфика рассматриваемой проблемы заключается, с одной стороны, в относительной простоте исходных математических моделей, с другой – вычислительными трудностями реализации принятой схемы достижения необходимого результата, и при этом – очевидностью практической значимости применения полученных соотношений. Ниже предлагается новый подход в развитии теории интегральных преобразований в Ω , основанный на предварительном нахождении операционного решения исходной задачи с неоднородной начальной функцией и однородными граничными условиями. При этом зна-

чительно сокращаются вычислительные затраты по сравнению с подходами на основе представлений классических дифференциальных уравнений математической физики [2, 3].

1. Первая краевая задача

Развиваемый подход вначале подробно рассмотрим для первой краевой задачи вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), r > r_0, t > 0, \quad (1)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = f(r), r \geq r_0, \quad (2)$$

$$T(r, t)|_{r=r_0} = 0, t > 0 \quad (3)$$

$$|T(r, t)| < \infty, r \geq r_0, t \geq 0. \quad (4)$$

В пространстве изображений по Лапласу $\bar{T}(r, p) = \int_0^\infty \exp(-pt)T(r, t)dt$ решение преобразованной задачи (1)–(4)

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}}{dr} - (p/a)\bar{T} = -\frac{1}{a}f(r), r > r_0, \quad (5)$$

$$\bar{T}(r, p)|_{r=r_0} = 0, |\bar{T}(r, p)| < \infty, r \geq r_0 \quad (6)$$

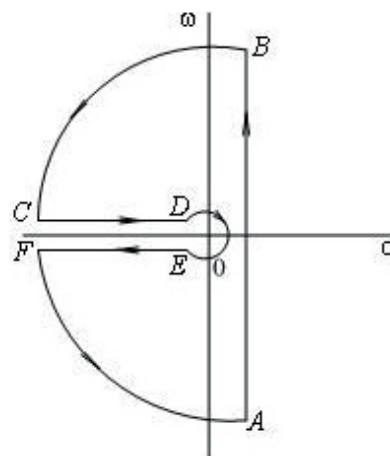
запишем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p) = & \frac{1}{a} \left\{ I_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^r \rho f(\rho) I_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\} - \\ & - \frac{1}{a} \left\{ \frac{I_0(r_0\sqrt{p/a})}{K_0(r_0\sqrt{p/a})} K_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $K_0(z), I_0(z)$ – модифицированные функции Бесселя. Для нахождения оригинала изображения (7) используем теорему обращения в виде контурного интеграла Римана–Меллина [1]:

$$T(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt) \bar{T}(r, p) dp \quad (p = \sigma + i\omega). \quad (8)$$

Подынтегральная функция в (8) имеет при $p = 0$ точку ветвления, и поэтому при вычислении интеграла (8) следует воспользоваться контуром на рисунке, приведенном справа. В этом контуре у подынтегральной функции нет нулей, условия леммы Жордано выполняются, и поэтому интеграл (8) можно заменить суммой интегралов по CD , EF и по небольшой окружности с центром в начале координат.



Наличие точки ветвления в начале координат.

При вычислении интеграла используем соотношения [8]:

$$K_0(iz) = -(\pi i / 2) [J_0(z) - iY_0(z)]; K_0(-iz) = (\pi i / 2) [J_0(z) + iY_0(z)]; I_0(\pm iz) = J_0(z),$$

где $J_0(z), Y_0(z)$ – функции Бесселя.

После ряда вычислений получаем соотношение:

$$T(r, t) = \int_0^\infty \frac{\Psi_1(\lambda r) \exp(-a\lambda^2 t)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda \int_{r_0}^\infty f(\rho) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho, \quad (9)$$

$$\text{где } \Psi_1(\lambda r) = J_0(\lambda r) Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r) J_0(\lambda r_0). \quad (10)$$

При $t = 0$ из (9) находим:

$$f(r) = \int_0^\infty \frac{\Psi_1(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda \int_{r_0}^\infty f(\rho) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho. \quad (11)$$

Полученное соотношение (11) можно записать в виде:

$$\text{если } \bar{f}(\lambda) = \int_{r_0}^\infty f(\rho) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho, \quad (12)$$

$$\text{то } f(r) = \int_0^\infty \frac{\bar{f}(\lambda) \Psi_1(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda. \quad (13)$$

Таким образом, на основании соотношений (12)–(13) можно сделать вывод: построено интегральное преобразование функции $T(r, t)$

$$\bar{T}(\lambda, t) = \int_{r_0}^\infty T(\rho, t) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho \quad (14)$$

с формулой обращения

$$T(r, t) = \int_0^\infty \frac{\bar{T}(\lambda, t) \Psi_1(\lambda r)}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda. \quad (15)$$

При этом изображение оператора справа в (1) имеет вид:

$$\int_{r_0}^\infty \Delta T(\rho, t) \Psi_1(\lambda \rho) \rho d\rho = -\frac{2}{\pi} T(r, t) \Big|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \quad (16)$$

2. Вторая краевая задача

Операционное решение второй краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), r > r_0, t > 0, \quad (17)$$

$$T(r, t) \Big|_{t=0} = f(r), r \geq r_0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, t > 0, \quad (19)$$

$$|T(r, t)| < \infty, r \geq r_0, t \geq 0 \quad (20)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p) = & \frac{1}{a} \left\{ I_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^r \rho f(\rho) I_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \right. \\ & \left. + \frac{I_1(r_0\sqrt{p/a})}{K_1(r_0\sqrt{p/a})} K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\} \end{aligned}$$

Повторяя приведенную выше схему вычислений, приходим к интегральному преобразованию функции $T(r, t)$ для второй краевой задачи

$$\bar{T}(\lambda, t) = \int_{r_0}^\infty \rho \Psi_2(\lambda \rho) T(\rho, t) d\rho \quad (21)$$

с формулой обращения

$$T(r, t) = \int_0^\infty \frac{\Psi_2(\lambda r) \bar{T}(\lambda, t) \lambda d\lambda}{J_1^2(\lambda r_0) + Y_1^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda, \quad (22)$$

$$\Psi_2(\lambda r) = J_0(\lambda r) Y_1(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r) J_1(\lambda r_0).$$

При этом

$$\int_{r_0}^\infty \Delta T(\rho, t) \Psi_2(\lambda \rho) \rho d\rho = \frac{2}{\pi \lambda} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \quad (23)$$

3. Третья краевая задача

Операционное решение третьей краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), r > r_0, t > 0, \quad (24)$$

$$T(r, t) \Big|_{t=0} = f(r), r \geq r_0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = h T(r, t) \Big|_{r=r_0}, t > 0, \quad (26)$$

$$|T(r, t)| < \infty, r \geq r_0, t \geq 0. \quad (27)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, p) = & \frac{1}{a} \left\{ I_0(r\sqrt{p/a}) \int_r^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^r \rho f(\rho) I_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{p/a} I_1(r_0\sqrt{p/a}) - h I_0(r_0\sqrt{p/a})}{\sqrt{p/a} K_1(r_0\sqrt{p/a}) + h K_0(r_0\sqrt{p/a})} K_0(r\sqrt{p/a}) \int_{r_0}^\infty \rho f(\rho) K_0(\rho\sqrt{p/a}) d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущую схему рассуждений, находим интегральное преобразование функции $T(r, t)$ в случае третьей краевой задачи:

$$\bar{T}(\lambda, t) = \int_{r_0}^\infty T(\rho, t) \Psi_3(\lambda \rho) \rho d\rho, \quad (28)$$

$$\Psi_3(\lambda r) = [J_0(\lambda r)Y_1(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)] + (h/\lambda)[J_0(\lambda r)Y_0(\lambda r_0) - Y_0(\lambda r)J_0(\lambda r_0)];$$

формула обращения имеет вид

$$T(r, t) = \int_0^\infty \frac{\bar{T}(\lambda, t)\Psi_3(\lambda r)}{[J_1(\lambda r_0) + (h/\lambda)J_0(\lambda r_0)]^2 + [Y_1(\lambda r_0) + (h/\lambda)Y_0(\lambda r_0)]^2} \lambda d\lambda; \quad (29)$$

при этом

$$\int_{r_0}^\infty \Delta T(\rho, t)\Psi_3(\lambda \rho)\rho d\rho = \frac{2}{\pi\lambda} \left[\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} - hT(r, t) \right] \Big|_{r=r_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \quad (30)$$

Приведенными интегральными соотношениями можно пользоваться при условии, если $f(r)$ – функция с ограниченным изменением в окрестности точки r и интеграл $\int_{r_0}^\infty \rho |f(\rho)| d\rho$ абсолютно сходится.

Следующий этап исследований – запись интегральных соотношений для аналитических решений краевых задач вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + F(r, t), r > r_0, t > 0, \quad (31)$$

$$T(r, t)|_{t=0} = \Phi_0(r), r \geq r_0, \quad (32)$$

$$\left[\beta_1 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \beta_2 T(r, t) \right] \Big|_{r=r_0} = \beta_3 \varphi(t), t > 0, \quad (33)$$

$$|T(r, t)| < \infty, r \geq r_0, t \geq 0. \quad (34)$$

Соотношение (33) содержит все три граничных условия при соответствующих значениях коэффициентов $\beta_i (i=1, 2, 3) (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 > 0)$. Используя подход, развитый автором в [1], приходим к искомому соотношению вида

$$\begin{aligned} T(r, t) = & \int_{r_0}^\infty r' T(r', 0) G(r, r', t) dr' + ar_0 \int_0^t \left[T(r', \tau) \frac{\partial G(r, r', t - \tau)}{\partial r'} - G(r, r', t - \tau) \frac{\partial T(r', \tau)}{\partial r'} \right] \Big|_{r=r_0} d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{r_0}^\infty r' G(r, r', t - \tau) F(r', \tau) d\tau dr', \end{aligned} \quad (35)$$

где $G(r, r', \tau)$ – функция Грина соответствующей краевой задачи в (31)–(34), удовлетворяющая условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right), r > r_0, t > \tau, \quad (36)$$

$$G(r, r', t - \tau) \Big|_{t=\tau} = \frac{1}{r} \delta(r - r'), (r, r') > r_0, \quad (37)$$

$$\left(\beta_1 \frac{\partial G}{\partial r} + \beta_2 G \right) \Big|_{r=r_0} = 0, t > \tau, \quad (38)$$

$$|G(r, r', t - \tau)| < \infty, r > r_0, t > \tau. \quad (39)$$

Развитая теория интегральных преобразований позволяет вывести все функции Грина на основе решения задачи (36)–(39):

функция Грина первой краевой задачи ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$)

$$G(r, r', t - \tau) = \int_0^\infty \frac{\exp[-a\lambda^2(t - \tau)] \Psi_1(\lambda r) \Psi_1(\lambda r')}{J_0^2(\lambda r_0) + Y_0^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda; \quad (40)$$

функция Грина второй краевой задачи ($\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$)

$$G(r, r', t - \tau) = \int_0^\infty \frac{\exp[-a\lambda^2(t - \tau)] \Psi_2(\lambda r) \Psi_2(\lambda r')}{J_1^2(\lambda r_0) + Y_1^2(\lambda r_0)} \lambda d\lambda; \quad (41)$$

функция Грина третьей краевой задачи ($\beta_1 / \beta_2 = -h$)

$$G(r, r', t - \tau) = \int_0^\infty \frac{\exp[-a\lambda^2(t - \tau)] \Psi_3(\lambda r) \Psi_3(\lambda r')}{[J_1(\lambda r_0) + (h/\lambda)J_0(\lambda r_0)]^2 + [Y_1(\lambda r_0) + (h/\lambda)Y_0(\lambda r_0)]^2} \lambda d\lambda, \quad (42)$$

где $\Psi_i(\lambda r)$ ($i = 1, 2, 3$) приведены выше.

Предложенные соотношения (35), (40)–(42) – новые результаты в аналитической теории нестационарного теплопереноса, практическая значимость которых очевидна. Они могут быть использованы в численных экспериментах для многих частных случаев краевых функций в (31)–(34): импульсных, пульсирующих, периодических, аperiodических, кусочно-постоянных и т. д. Разумеется, эти соображения не исключают прямого применения развитой теории интегральных преобразований, а только дополняют представленный математический аппарат для всестороннего изучения указанной выше области Ω .

Список литературы:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
3. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 228 с.
4. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 2. С. 99–127.
5. Карташов Э.М. Расчет температурных полей в твердых телах на основе улучшенной сходимости рядов Фурье-Ханкеля // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 3. С. 106–125.
6. Карташов Э.М., Михайлова Н.А. Интегральные соотношения для аналитических решений обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности // Вестник МИТХТ. 2011. Т. 6. № 3. С. 106–110.
7. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термодинамики. М.: URSS, 2013. 651 с.

Выводы

Развит новый математический подход построения интегральных преобразований и формул обращения для них в области, ограниченной изнутри цилиндрической полостью. Развита метод функций Грина, предложены интегральные соотношения для аналитических решений краевых задач нестационарного теплопереноса, содержащие многочисленные частные случаи практической теплофизики.

References:

1. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p. (in Russ.)
2. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations in partial derivatives of mathematical physics. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1970. 710 p. (in Russ.)
3. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral transforms and operational calculus. Moscow: Publishing House of the N.E. Bauman Moscow State Technical University, 1996. 228 p. (in Russ.)
4. Kartashov E.M. The method of integral transformations in the analytic theory of the thermal conductivity of solids. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Energetika* (Proceedings of RAS. Power Engineering). 1993; 2: 99-127. (in Russ.)
5. Kartashov E.M. Calculation of temperature fields in solids based on improved convergence of Fourier-Hankel series. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Energetika* (Proceedings of RAS. Power Engineering). 1993; 3: 106-125. (in Russ.)
6. Kartashov E.M., Mikhailova N.A. Integral relations for analytic solutions of the generalized equation of nonstationary heat conduction. *Vestnik MITHT* (Fine Chemical Technologies). 2011; 6(3): 106-110. (in Russ.)

8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

9. Аттетков А.В., Волков И.К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической полостью // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. 1999. № 1. С. 49–56.

10. Карташов Э.М. Об одном классе интегральных преобразований для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81. № 1. С. 123–130.

7. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical theory of heat conductivity and applied thermoelasticity. Moscow: URSS Publ., 2012. 653 p. (in Russ.).

8. Carslow G., Eger E. Thermal conductivity of solids. Moscow: Nauka Publ., 1964. 487 p. (in Russ.).

9. Attetkov A.V., Volkov I.K. Formation of temperature fields in a region bounded from within by a cylindrical cavity. *Vestnik MGTU. Mashinostroyeniye* (Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering). 1999; 1: 49-56. (in Russ.)

10. Kartashov E.M. On a class of integral transformations for the generalized equation of nonstationary heat conductivity. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* (Journal of Engineering Physics and Thermophysics). 2008; 81(1): 123-130. (in Russ.)

Об авторе:

Карташов Эдуард Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

About the author:

Eduard M. Kartashov, D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow 119571, Russia).

Для цитирования: Карташов Э.М. Интегральное преобразование в частично ограниченной области с радиальным потоком теплоты // Тонкие химические технологии / Fine Chemical Technologies. 2018. Т. 13. № 6. С. 89–96. DOI: 10.32362/2410-6593-2018-13-6-89-96

For citation: Kartashov E.M. Integral transformation in a partially bounded region with a radial thermal flow. *Tonkie khimicheskie tekhnologii / Fine Chemical Technologies*. 2018; 13(6): 89-96. (in Russ.). DOI: 10.32362/2410-6593-2018-13-6-89-96