

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА

Э.М. Карташов

В статье развиты новые представления о краевых задачах переноса для уравнений гиперболического типа.

Уравнение энергии для изотропных твердых тел

$$c\rho \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q}(M,t) + F(M,t) \quad (1)$$

$$M \in D, \quad t > 0,$$

где вектор $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T(M,t)$ имеет вид классической зависимости Фурье [1], приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) + (1/c\rho)F(M,t) \quad (2)$$

$$M \in D, \quad t > 0,$$

и соответствующим для уравнения (2) краевым задачам с условиями

$$T(M,t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D} \quad (3)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} + \beta_2 T(M,t) = \varphi(M,t), \quad (4)$$

$$M \in S, \quad t \geq 0.$$

Здесь D – конечная (или частично ограниченная) выпуклая область изменения $M(x,y,z)$; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S ; $\Omega = (M \in D, \quad t > 0)$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x,y,z,t) с основанием D при $t=0$. Входящие в (1)-(4) параметры, теплофизические характеристики среды, смысл которых общеизвестен [1]. Краевые функции в (2)-(4) принадлежат классу функций $F(M,t) \in C^0(\bar{\Omega})$, $\Phi_0(M) \in C^1(\Omega)$, $\varphi(M,t) \in C^0(S \times t \geq 0)$.

Искомое решение

$$T(M,t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega});$$

$$\operatorname{grad}_M T(M,t) \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

В последние десятилетия в связи с изучением высокоинтенсивных (и других) процессов вырос интерес к гиперболическим моделям нестационарной теплопроводности на основе обобщенного закона Максвелла – Каттанео – Лыкова [2]

$$\vec{q}(M,t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M,t) - \tau_r \frac{\partial \vec{q}(M,t)}{\partial t}, \quad (5)$$

$$M \in D, \quad t > 0,$$

учитывающего конечную скорость распространения тепла; τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения тепла v_T соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$. Для металлов

$\tau_r = 10^{-11}$ с; для азота $\tau_r = 10^{-9}$ с; для аморфных тел (неорганические и органические стекла) τ_r достигает значений $(10^{-7} - 10^{-5})$ с; опытное измерение τ_r во многих случаях не представляется возможным. Скорость распространения тепла для стали $v_T = 1800$ м/с; для алюминия $v_T = 2930$ м/с; для азота $v_T = 150$ м/с. Для газов в условиях сверхзвукового потока влияние конечной скорости распространения тепла на теплообмен становится заметным, подобное влияние может проявляться также при очень низких температурах (например в жидком гелии $v_T = 19$ м/с при $T = 1.4$ К) и даже при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени при резких тепловых воздействиях на поверхность твердого тела (например, в случае теплового удара, теория которого развита в [3]).

Соотношения (1) и (5) приводят к уравнению переноса гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2} + (\tau_r/c\rho) \left(\frac{\partial F(M,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M,t) \right), \quad (6)$$

$$M \in D, \quad t > 0$$

и соответствующим задачам обобщенного типа, имеющим обширные практические применения в различных вопросах науки и техники [3].

Обобщенные задачи переноса значительно отличаются от классических (2)-(4), являясь более сложными при нахождении аналитических решений этих задач. В то же

время, найденное решение во многих случаях содержит неточности как в самих функциональных конструкциях этих решений, так и в исходной постановке задачи. Для уравнения (6) чаще используются классические граничные условия (4), а не интегральная или эквивалентная ей форма записи граничных условий, вытекающая из обобщенного закона (5).

Эти вопросы мы разбираем ниже.

Рассмотрим вначале уравнение (6) при постоянных начальных условиях

$$T(M, t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

$M \in \bar{D}$.

Запишем соотношение (5) в скалярной форме:

$$q(M, t) = -\lambda_T \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} - \tau_r \frac{\partial q(M, t)}{\partial t}, \quad (8)$$

$M \in \bar{D}$, $t > 0$,

где под $q(M, t)$ понимается проекция вектора $\vec{q}$ на направление нормали $\vec{n}$. Из (8) находим:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \\ & = \frac{1}{\lambda_T} \left[q(M, t) - q(M, 0) \exp\left(\frac{t}{\tau_r}\right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$M \in \bar{D}$, $t \geq 0$.

Базовое соотношение (9) используем для записи граничных условий.

Граничные условия 2 рода.

Пусть на поверхности S задан тепловой поток $q(M, t) = \varphi(M, t)$, $M \in S$, $t \geq 0$. При этом в (9) предполагается выполнение условия (следует из (7)):

$$q(M, t)|_{t=0} = \varphi(M, t)|_{t=0} = 0, \quad M \in S. \quad (10)$$

Интегральная форма записи граничного условия имеет вид

$$-\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \frac{1}{\lambda_T} \varphi(M, t) \quad (11)$$

$M \in S$, $t \geq 0$;

дифференциальная форма, вытекающая из (8):

$$-\lambda_T \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = (1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}) \varphi(M, t) \Big|_{M \in S} \quad (12)$$

$t \geq 0$.

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi(M, t) \Big|_{M \in S} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \varphi_0 = const, & t > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Имеем следующие две эквивалентные

формы записи граничных условий 2 рода

$$-\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \frac{1}{\lambda_T} \varphi_0, \quad (14)$$

$t > 0$,

$$-\lambda_T \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = (1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}) \varphi_0, \quad (15)$$

$t > 0$,

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Как видим, для условий (13) формальный переход от интегральной формы (11) к дифференциальной (12) может быть использован операционный метод (преобразование Лапласа).

Граничные условия 3 рода.

Рассмотрим нагрев или охлаждение области D через поверхность S средой температуры $\varphi_c(M, t)$; при этом считается (в силу (7))

$$\varphi_c(M, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad M \in S, \quad (16)$$

то есть в начальный момент времени область $\bar{D}$ и окружающая среда находятся в тепловом равновесии. Интегральная форма записи граничного условия

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \\ & = -h [T(M, t) - \varphi_c(M, t)], \end{aligned} \quad (17)$$

$$M \in S, \quad t \geq 0; \quad (h = \frac{\alpha}{\lambda_T})$$

Эквивалентная (17) дифференциальная форма

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -h(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}) [T(M, t) - \\ & - \varphi_c(M, t)], \quad M \in S, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi_c(M, t) \Big|_{M \in S} = \begin{cases} T_0, & t = 0, \\ \varphi_c = const, & t > 0 \end{cases} \quad (19)$$

Имеем следующие две эквивалентные формы записи граничного условия

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \quad (20)$$

$$-h [T(M, t) \Big|_{M \in S} - \varphi_c], \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -h \left\{ [T(M, t) - \varphi_c] + \right. \\ & \left. + \tau_r \left[\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + (T_0 - \varphi_c) \delta(t) \right] \right\}, \quad M \in S, \end{aligned} \quad (21)$$

$t > 0$.

Рассмотрим теперь область $D = (x > l, t > 0)$ этот случай часто встречается в приложениях и также требует ряда уточнений. Уравнение (6) для этого случая (при $F=0$) имеет вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (22)$$

$x > l, t > 0,$

Начальные условия имеют вид (7).

Граничные условия 2 рода ($q(M, t) = \varphi(M, t)$).

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = -\frac{1}{\lambda_T} \varphi(t), \quad (23)$$

$t \geq 0$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{1}{\lambda_T} \left(1 + \tau_r \frac{d}{dt}\right) \varphi(t), \quad (24)$$

$t \geq 0.$

В (23)-(24) имеется в виду тепловой нагрев; при этом предполагается, что $\varphi(0)=0$.

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \varphi_0 = const, & t > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Имеем две эквивалентные формы записи граничных условий:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = -\frac{1}{\lambda_T} \varphi_0, \quad (26)$$

$t > 0,$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{1}{\lambda_T} (1 + \tau_r \delta(t)) \varphi_0, \quad t > 0. \quad (27)$$

Граничные условия 3 рода ($\varphi_c(t) =$ температура среды).

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \quad (28)$$

$$= h[T(x, t)|_{x=l} - \varphi_c(t)], \quad t \geq 0,$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = h(1 + \tau_r \frac{d}{dt}) [T(x, t)|_{x=l} - \quad (29)$$

$$= -\varphi_c(t)], \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} T_0, & t = 0, \\ \varphi_c = const, & t > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Имеем:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \quad (31)$$

$$= h[T(x, t)|_{x=l} - \varphi_c], \quad t \geq 0,$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -h \left\{ [T(x, t)|_{x=l} - \varphi_c] + \quad (32)$$

$$+ \tau_r \left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l} + \delta(t)(T_0 - \varphi_c) \right] \right\}, \quad t > 0$$

Пусть теперь в начальный момент времени

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M),$$

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi_1(M), \quad M \in \bar{D}. \quad (33)$$

Для этого случая все соотношения для граничных условий выписываются из (8)-(9) при условии, что $q(M, 0) \neq 0$.

Например, в случае граничных условий 3 рода;

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_r}\right] d\tau = \quad (34)$$

$$= -h[T(M, t) - \varphi_c(M, t)]|_{M \in S}, \quad t \geq 0;$$

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = -h(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}) [T(M, t) - \varphi_c(M, t)]|_{M \in S}, \quad (35)$$

Непрерывность искомого решения вплоть до границы области обеспечивается выполнением условия сопряжения

$$\frac{\partial \Phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = -h \left\{ [\Phi_0(M) - \varphi_c(M, 0)]|_{M \in S} + \quad (3)$$

$$+ \tau_r \left[\Phi_1(M) - \frac{\partial \varphi_c(M, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right] \Big|_{M \in S} \right\} \quad (6)$$

В противном случае условие (35) имеет место при $t > 0$.

Если $\Phi_0(M) \neq \varphi_c(M, 0)$, то условие (34)

выполняется при $t > 0$; при $\Phi_0(M) = \varphi_c(M, 0)$ условие сопряжения (36)

упрощается. Предельный переход в (17), (28), (34) при $(1/h) \rightarrow 0$ показывает, что граничные условия 1 рода сохраняют свою форму записи

$$T(M, t) = \varphi(M, t) \quad M \in S, \quad t \geq 0. \quad (37)$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.
2. Подстригач, Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – Киев : Наук. Думка, 1976. – 312 с.
3. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М. : Высшая школа, 2005. – 430 с.