

Э.М. Карташов

О НОВОМ ПОДХОДЕ ПРИ РЕШЕНИИ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И
НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

УДК 536.2.001.24

В статье развит новый подход в использовании метода функций Грина при решении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости.

Уравнения эллиптического типа, к которому относится уравнение Лапласа, играют важную роль в приложениях. К ним приводят задачи о потенциальном движении несжимаемой жидкости; о потенциале электростатического поля; о стационарных тепловых состояниях; об установившихся диффузионных процессах; о потенциальном поле тяготения и др. Для линейных эллиптических уравнений второго порядка и, в частности, для уравнения Лапласа, задачи Дирихле и Неймана являются основными краевыми задачами. Эти задачи детально разобраны в многочисленных руководствах по математической физике, в ряде монографий по теории ньютоновского потенциала, в многочисленных публикациях, касающихся применения соответствующих интегральных соотношений к изучению конкретных физических процессов (ссылки в [1,2]). Достаточно надежными являются и всевозможные аналитические методы решения указанных задач, в основе которых лежат всевозможные формулы преобразования объемных либо плоских интегралов в поверхностные или криволинейные, использование функций

единичных источников и диполей. К ним следует добавить теорию потенциала и метод интегральных уравнений; метод отражения; метод конформных отображений; метод разделения переменных; метод интегральных преобразований, основанный на теории спектральных задач. И как это ни странно, но в столь казалось бы почти завершенной области математической физики еще остались «математические резервы» для переосмысливания самих основ развитых аналитических подходов. Следствием последнего является существенное упрощение технических трудностей, связанных с нахождением точных аналитических решений для ряда областей классических краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

Полученные в настоящей статье результаты дают основание предвидеть интересные перспективы в дальнейшем развитии теории краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Пусть D - конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x, y)$, Γ - кусочно-гладкий контур, ограничивающий область D , - $\vec{n}$ внешняя нормаль к Γ . В области D ищется гармоническая функция $T(x, y) \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$, $\text{grad}_M T(M) \in C^0(\bar{D})$ ($\bar{D} = D + \Gamma$), удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

а на границе Γ граничным условиям вида (задача Дирихле):

$$T(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = \psi(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma}; \quad (2)$$

либо (задача Неймана):

$$T(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = \psi(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma}. \quad (3)$$

Задача Дирихле (1) – (2) везде имеет решение при некоторых весьма общих предположениях относительно Γ и $\psi(x, y)$. Это решение имеет вид [3]:

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\psi(x', y') \frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial n'} \right]_{(x', y') \in \Gamma} dl', \quad (4)$$

если известна функция Грина $G(x, y, x', y')$ [1].

Что касается задачи Неймана (1), (3), то функция $\psi(x, y)$ на кривой Γ не может быть задана произвольно. Условием существования решения задачи Неймана является выполнение равенства

$$\int_{\Gamma} \psi(x', y') \Big|_{(x', y') \in \Gamma} dl' = 0 \quad (5)$$

При этом очевидно, что вместе с любым решением $T(x, y)$ решением будет также $T(x, y) + \text{const}$. Можно доказать, что других решений задача Неймана не имеет, то есть, что разность двух любых решений задачи Неймана постоянна. Это означает, что решение задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной и может быть представлено в виде [3]:

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\psi(x', y') G(x, y, x', y')]_{(x', y') \in \Gamma} dl'. \quad (6)$$

Согласно теории краевых задач, для уравнения (1) входящая в (4), (6) функция Грина $G(x, y, x', y')$ находится с использованием фундаментального решения $q(x, y, x', y') = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ для уравнения (1) и записывается в виде $G(x, y, x', y') = W(x, y, x', y') - q(x, y, x', y')$, где $W(x, y, x', y')$ удовлетворяет условиям

$$\Delta_M W = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (7)$$

$$W(x, y, x', y') \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = q(x, y, x', y') \Big|_{(x, y) \in \Gamma} \quad (8)$$

в случае задачи Дирихле и

$$\Delta_M W = 0, \quad (x, y) \in D, \quad \frac{\partial W(x, y, x', y')}{\partial n} \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = \frac{\partial q(x, y, x', y')}{\partial n} \Big|_{(x, y) \in \Gamma} \quad (9)$$

в случае задачи Неймана.

Всякий случай нахождения функции Грина соответствующей краевой задачи для той или иной области D весьма важен, так как содержит обширную информацию, позволяя выписать большое число аналитических решений в виде интегральных соотношений (4), (6) в зависимости от неоднородностей в (2)-(3). В то же время указанная процедура составляет основную трудность при решении задач Дирихле и Неймана и в явном виде функция Грина известна только для небольшого числа простых областей. В частности, функция

Грина известна для шара, круга, полупространства и полуплоскости, для ряда областей, ограниченных сферами, конусами и пересекающимися плоскостями [1]. Но и в этих случаях процедура нахождения функции Грина связана с серьезными техническими (вычислительными) трудностями. Этих трудностей в ряде случаев можно избежать, если рассматривать следующий подход построения аналитических решений указанных задач в виде интегральных соотношений типа (4), (6).

Имея в виду задачи (1)-(2) и (1), (3), определим функцию Грина $G(x, y, x', y')$ как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\delta(x-x')\delta(y-y'), \quad [(x, y), (x', y')] \in D \quad (10)$$

с граничными условиями

$$G(x, y, x', y') \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = 0 \quad (11)$$

в случае задачи Дирихле и

$$\left. \frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial n} \right|_{(x, y) \in \Gamma} = 0 \quad (12)$$

в случае задачи Неймана.

Применим далее вторую формулу Грина к функциям $G(M, P)$, где $P = P(x', y')$ и к искомому решению $T(M)$:

$$\begin{aligned} \iint_D [G(M, P) \Delta T(M) - T(M) \Delta G(M, P)] d\sigma_M = \\ = \int_{\Gamma} \left[G(M, P) \frac{\partial T(M)}{\partial n} - T(M) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \right]_{M \in \Gamma} dl. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая теперь (1), (10), (11), (12), а также свойство симметрии формулы Грина $G(M, P) = G(P, M)$, находим следующие интегральные соотношения

$$T(M) = - \int_{\Gamma} \left[T(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} \right]_{P \in \Gamma} dl_P \quad (14)$$

для задачи Дирихле и

$$T(M) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial T(P)}{\partial n_P} G(M, P) \right]_{P \in \Gamma} dl_P \quad (15)$$

для задачи Неймана.

В интегральных выражениях (14)-(15) важно иметь в виду направление нормали при записи нормальной производной в конкретной системе координат, если учесть, что в массовой литературе по математической физике имеют место разночтения в знаках в приведенных аналитических решениях задач Дирихле и Неймана. Дальнейшее упрощение процедуры нахождения аналитических решений в виде интегральных соотношений (14) и (15) заключается в том, что в (14) и (15) нет необходимости искать полное выражение для функции Грина $G(x, y, x', y')$ путем решения задач (10)-(11), либо (10), (12). Действительно, введем новую функцию $G^*(x, y, x')$ как решение

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (16)$$

$$G^*(x, y, x') \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = \delta(x - x') \quad (17)$$

в случае задачи Дирихле и

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial G^*(x, y, x')}{\partial n} \right|_{(x, y) \in \Gamma} = \delta(x - x') \quad (19)$$

в случае задачи Неймана.

Применим формулу Грина (13) к функциям $G(x, y, u, v)$ и $G^*(x, y, x')$:

$$\begin{aligned} \iint_D [G(x, y, u, v) \Delta G^*(u, v, x') - G^*(u, v, x') \Delta G(x, y, u, v)] du dv = \\ = \int_{\Gamma} \left[G(x, y, u, v) \frac{\partial G^*(u, v, x')}{\partial n_v} - G^*(u, v, x') \frac{\partial G(x, y, u, v)}{\partial n_v} \right]_{(u, v) \in \Gamma} dl. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая далее (10)-(12) и (16)-(19), приходим к основному результату:

$$G^*(x, y, x') = - \left. \frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial n'} \right|_{(x', y') \in \Gamma} \quad (21)$$

в случае задачи Дирихле и

$$G^*(x, y, x') = G(x, y, x', y') \Big|_{(x', y') \in \Gamma} \quad (22)$$

в случае задачи Неймана.

Таким образом, интегральные представления аналитических решений краевых задач Дирихле (1), (2) и Неймана (1), (3) теперь могут быть записаны в виде:

задача Дирихле (1), (2)

$$T(x, y) = \int_{\Gamma} [T(x', y') G^*(x, y, x')] \Big|_{(x', y') \in \Gamma} dl' ; \quad (23)$$

задача Неймана (1), (3)

$$T(x, y) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial T(x', y')}{\partial n'} G^*(x, y, x') \right] \Big|_{(x', y') \in \Gamma} dl' . \quad (24)$$

Построение функции $G^*(x, y, x')$ связано с существенно меньшими вычислительными трудностями по сравнению с процедурой нахождения полного выражения для функции Грина $G(x, y, x', y')$.

Рассмотрим ряд иллюстративных примеров для классических областей, описанных в литературе по математической физике.

Пусть D – полуплоскость $y > 0$, на границе $y = 0$ задано условие (задача Дирихле):

$$T(x, y) \Big|_{y=0} = \psi(x), \quad |x| < \infty. \quad (25)$$

Функция Грина для полуплоскости $y > 0$ находится путем предварительного решения задачи (7)-(8) и имеет вид [3]:

$$G(x, y, x', y') = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r^*}, \quad (26)$$

$$\text{где } r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad r^* = \sqrt{(x - x')^2 + (y + y')^2}.$$

Выражение (26) находится методом отражения путем достаточно длинной вычислительной процедуры. Интеграл (4) и выражение (26) дают решение указанной задачи в виде интеграла Пуассона для полуплоскости

$$T(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x')}{(x - x')^2 + y^2} dx'. \quad (27)$$

Не меньшей громоздкостью отличается процедура построения функции Грина $G(x, y, x', y')$, если исходить из определения (10)-(11):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\delta(x - x')\delta(y - y'), \quad |x| < \infty, y > 0, \quad (28)$$

$$G(x, y, x', y') \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = 0, \quad |x| < \infty, \quad (29)$$

$$|G(x, y, x', y')| < +\infty, \quad y \geq 0, |x| < \infty. \quad (30)$$

Рассмотрим задачу (28)-(30). В пространстве изображений синус-преобразования Фурье $\bar{G}(x, \xi, x', y') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G(x, y, x', y') \sin \xi y dy$ решение

преобразованного уравнения (28) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, \xi, x', y') &= C_1 \exp(\xi x) + C_2 \exp(-\xi x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \sin \xi y' \times \\ &\times \left[\exp(\xi x) \int_x^\infty \exp(-\xi \alpha) \delta(\alpha - x') d\alpha + \exp(-\xi x) \int_{-\infty}^x \exp(\xi \alpha) \delta(\alpha - x') d\alpha \right]. \end{aligned}$$

Учитывая далее условие ограниченности решения в бесконечно удаленных точках (условие (30)), находим функцию $\bar{G}$:

$$\overline{G}(x, \xi, x', y') = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \sin \xi y' \exp[-\xi(x-x')] & x' < x \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \sin \xi y' \exp[-\xi(x'-x)] & x' > x. \end{cases}$$

Искомый оригинал (по формуле обращения) имеет вид

$$G(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \quad (31)$$

Искомое решение $T(x, y)$ задачи (1), (25) по формуле (14), записанной для данной области в виде

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') \frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' \quad (32)$$

совпадает с интегралом Пуассона (27).

Теперь рассмотрим нахождение функции $G^*(x, y, x')$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0, \quad |x| < \infty, y > 0, \quad (33)$$

$$G^*(x, y, x') \Big|_{y=0} = \delta(x-x'), \quad |x| < \infty, \quad (34)$$

$$|G^*(x, y, x')| < +\infty, \quad y \geq 0, |x| < \infty. \quad (35)$$

В пространстве экспоненциального преобразования Фурье

$$\overline{G}^*(\xi, y, x') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x) G^*(x, y, x') dx \text{ решение преобразованного уравнения (33)}$$

с учетом граничных условий (34)-(35) имеет вид $G^*(\xi, y, x') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp(i\xi x' - |\xi|y)$.

Искомый оригинал находим по формуле обращения:

$$G^*(x, y, x') = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi x' - i\xi x - |\xi|y) d\xi = \frac{y}{\pi[(x-x')^2 + y^2]}. \quad (36)$$

Равенство (21), записанное для данной области в виде $G^*(x, y, x') = \left[\frac{\partial G(x, y, x', y')}{\partial y'} \right]_{y'=0}$

проверяется непосредственно выражениями (31), (36). Искомое решение $T(x, y)$ задачи (1), (25) имеет вид (23)

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') G^*(x, y, x') dx'$$

и дает интеграл Пуассона (27).

Рассмотрим далее задачу Дирихле для круга:

$$\frac{\partial^2 T(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (37)$$

$$T(r, \varphi) \Big|_{r=R} = \psi(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (38)$$

$$|T(r, \varphi)| < +\infty, \quad 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (39)$$

В математической физике эта задача считается классической и достаточно стандартной, хотя ее решение связано с длительной вычислительной процедурой. Согласно теории функция Грина $G(r, \varphi, r', \varphi') = W(r, \varphi, r', \varphi') - q(r, \varphi, r', \varphi')$, где

$q(r, \varphi, r', \varphi') = \ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$, $\rho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}$, а $W(r, \varphi, r', \varphi')$ является решением задачи (7)-(8), записанной для круга в полярной системе координат, находится с использованием сопряженности точек относительно окружности и имеет вид [3]:

$$q(r, \varphi, r', \varphi') = \ln \frac{R/r'}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2r \frac{R^2}{r'} \cos(\varphi - \varphi')}} - \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 - r'^2 - 2r \cdot r' \cos(\varphi - \varphi')}}. \quad (40)$$

Интегральное выражение (4), записанное для области, указанной в (37), имеет вид

$$T(r, \varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \frac{\partial G(r, \varphi, r', \varphi')}{\partial r'} \Big|_{r'=R} d\varphi' \quad (41)$$

и с учетом (40) дает решение задачи (37)-(39) в виде интеграла Пуассона для круга

$$T(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi'. \quad (42)$$

Решение задачи (37)-(39) можно записать и в виде интегрального соотношения (14)

$$T(r, \varphi) = - \int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \left[R \frac{\partial G(r, \varphi, r', \varphi')}{\partial r'} \right]_{r'=R} d\varphi', \quad (43)$$

если исходить из определения функции Грина (10)-(11):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi'), \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (44)$$

$$G(r, \varphi, r', \varphi') \Big|_{r=R} = 0, \quad (\varphi, \varphi') \in [0, 2\pi), \quad (45)$$

$$|G(r, \varphi, r', \varphi')| < +\infty, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (46)$$

Однако, полное выражение для функции Грина $G(r, \varphi, r', \varphi')$ как решения задачи (44)-(46) можно не находить, так как согласно развиваемой в статье теории в виде (21) под знаком интеграла в (43)

$$-\frac{\partial G(r, \varphi, r', \varphi')}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = G^*(r, \varphi, \varphi'), \quad (47)$$

где $G^*(r, \varphi, \varphi')$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G^*}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (48)$$

$$G^*(r, \varphi, \varphi') \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \delta(\varphi - \varphi'), \quad (\varphi, \varphi') \in [0, 2\pi), \quad (49)$$

$$|G^*(r, \varphi, \varphi')| < +\infty, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (50)$$

Эта задача интересна тем, что для ее решения можно применить теорию сопряженных гармонических функций – достаточно редкий подход в аналитической теории теплопроводности твердых тел для случаев установившихся температур. Предлагаемые ниже преобразования основаны на следующих соображениях.

Пусть $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ – действительные функции x и y , причем такие, что $\xi + i\eta = f(x + iy) = f(z)$.

(51)

Тогда имеем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial x} = f'(z); \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + i \frac{\partial \eta}{\partial y} = if'(z), \quad (52)$$

откуда

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (53)$$

Отсюда вытекает, что кривые $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ ортогональны.

В задаче (48)-(50) запишем уравнение (48) в декартовой системе координат, а граничные условия оставим без изменения:

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < R, \quad (54)$$

$$G^*(r, \varphi, \varphi') \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \delta(\varphi - \varphi'), \quad (\varphi, \varphi') \in [0, 2\pi), \quad (55)$$

$$|G^*(r, \varphi, \varphi')| < +\infty, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (56)$$

Введем преобразование

$$\xi + i\eta = -i \ln \frac{x + iy}{R}, \quad (57)$$

а вместо функции $G^*(x, y, x')$ тождественно равную ей: $W(\xi, \eta, \xi') = G^*(x, y, x')$. Так как

$x + iy = R \exp(i\varphi)$, то

$$\xi = \varphi, \quad \eta = \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (58)$$

и область $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi$ перейдет в область $\eta \geq 0, 0 \leq \xi < 2\pi$. Используя (53), можно показать, что функция $W(\xi, \eta, \xi')$ также удовлетворяет уравнению Лапласа и задача (54)-(56) теперь будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0, \quad \eta > 0, \quad 0 \leq \xi < 2\pi, \quad (59)$$

$$W(\xi, \eta, \xi') \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{R} \delta(\xi - \xi'), \quad (\xi, \xi') \in [0, 2\pi), \quad (60)$$

$$W(\xi, \eta, \xi') = W(\xi + 2\pi, \eta, \xi'), \quad \eta > 0, \quad \xi' \in [0, 2\pi), \quad (61)$$

$$|W(\xi, \eta, \xi')| < +\infty, \quad \eta \geq 0, \quad 0 \leq \xi < 2\pi. \quad (62)$$

Задача (59)-(62) может быть решена методом разделения переменных [1], что дает в конечном счете:

$$W(\xi, \eta, \xi') = \frac{1}{2\pi R} \frac{1 - \exp(-2\eta)}{1 - 2\exp(-\eta)\cos(\xi - \xi') + \exp(-2\eta)}.$$

Возвращаясь к старым переменным (58), находим искомую функцию $G^*(r, \varphi, \varphi')$

$$G^*(r, \varphi, \varphi') = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi')}, \quad (63)$$

и вместе с этим на основании (43), (47), (63) искомое решение задачи (37)-(39) в виде интеграла Пуассона (42) для круга.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и задачи Неймана для полуплоскости и круга. Ограничимся краткой справкой.

Для полуплоскости $|x| < \infty, y > 0$ функция $T(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) и согласно (3) граничному условию

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\psi(x), \quad |x| < \infty. \quad (64)$$

Функция $G^*(x, y, x')$ удовлетворяет уравнению (18), граничному условию

$$\left. \frac{\partial G^*(x, y, x')}{\partial y} \right|_{y=0} = -\delta(x - x'), \quad |(x, x')| < \infty \quad (65)$$

и имеет вид:

$$\begin{aligned} G^*(x, y, x') &= -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x - x')^2 + y^2} = G(x, y, x', y') \Big|_{y'=0} = \\ &= \left\{ -\frac{1}{2\pi} \left[\ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} + \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y + y')^2} \right] \right\}_{y'=0}. \end{aligned}$$

Искомое решение

$$T(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') \ln \sqrt{(x - x')^2 + y^2} dx' + const. \quad (66)$$

Для круга $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ функция $T(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (37) и граничному условию

$$\left. \frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=R} = \psi(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (67)$$

Функция $G^*(r, \varphi, \varphi')$ удовлетворяет уравнению (48) и граничному условию

$$\left. \frac{\partial G^*(r, \varphi, \varphi')}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{1}{R} \delta(\varphi - \varphi'). \quad (68)$$

Искомое решение $T(r, \varphi)$ имеет вид (24) (интеграл Дини)

$$\begin{aligned} T(r, \varphi) &= R \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial T(r', \varphi')}{\partial r'} G^*(r, \varphi, \varphi') \right]_{r'=R} d\varphi' = \\ &= R \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi') \frac{r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi') + R^2}{R^2} d\varphi' + const. \end{aligned} \quad (69)$$

Развитый подход касался краевых задач для уравнения Лапласа. Что касается уравнения Пуассона $\Delta T(M) + F(M) = 0$, $M \in D$, то здесь остаются в силе классические представления теории уравнений эллиптического типа, описанные в [1].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа. 2001. 540 с.
2. Карташов Э.М. // Инж. – физич. ж-л. 2001. т. 74. №2. С.171-195.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1969. 287 с.