

СОЛИТОНЫ В ОБОБЩЕННОЙ КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ И ТЕОРИЯ ШАРОВОЙ МОЛНИИ

Б.В. Алексеев, заведующий кафедрой
кафедра Физики МИТХТ им. М.В. Ломоносова
e-mail: B.Alexeev@ru.net

Квантовые солитоны открыты с помощью обобщенной квантовой гидродинамики. Солитоны имеют характер стабильных квантовых объектов в самосогласованном электрическом поле. Теория квантовых солитонов приводит к объяснению существования стабильных атомов на микроскопическом уровне и шаровых молний на макроскопическом уровне описания физических систем. Разработанная теория демонстрирует большие возможности обобщенной квантовой гидродинамики в исследовании квантовых солитонов как типичных образований в обобщенной квантовой теории. Статья может также рассматриваться как продолжение исследований, изложенных в известной монографии автора (Boris V. Alexeev, *Generalized Boltzmann Physical Kinetics*. – Elsevier, 2004).

Ключевые слова: Основы теории процессов переноса, физическая кинетика, обобщенные гидродинамические уравнения, теория турбулентных течений, основания нелокальной физики, квантовые солитоны, теория шаровой молнии.

1. Введение

В статьях [1–3] изложена на основе принципов нелокальной физики разработанная автором обобщенная квантовая механика, из которой следует квантовая механика Шредингера – Маделунга как глубокий частный случай. Последующее изложение предполагает, что читателю известны основные базовые принципы построения нерелятивистской квантовой механики в рамках нелокальной физики. Эти сведения можно найти также в учебных пособиях автора [4, 5]. Установлено, что теория процессов переноса (включая квантовую механику) может быть представлена в рамках универсальной теории, основанной на нелокальном физическом описании. Показано, что уравнения нелокальной физики приводят к появлению солитонов, что поддерживает мнение Шредингера, трактовавшего квантовую механику с позиции существования волн материи. Уравнение Шредингера не является диссипативным уравнением. Поэтому изложенная квантовая гидродинамика является инструментом для решения задач в теории диссипативных наносистем. Результаты исследования могут быть применены также в теории шаровой молнии. Мы начнем изложение с напоминания (на качественном уровне) основных положений нелокальных принципов в теории диссипативных неравновесных статистических систем. В физической кинетике рассматриваются процессы переноса в открытых диссипативных системах. Поэтому кинетическое статистическое описа-

ние неизбежно связано с диагностикой системы. Таким элементом диагностики при теоретическом описании в физической кинетике является понятие физически бесконечно малого объема (ФБМО). Связь теоретического описания с диагностикой системы общеизвестна в физике. Достаточно вспомнить роль пробного заряда в электростатике или пробного контура в физике магнитных явлений.

Традиционное определение ФБМО содержит утверждение, что ФБМО V_m содержит достаточное число частиц для введения статистического описания, но вместе с тем ФБМО много меньше объема V рассматриваемой физической системы, что обеспечивает локальный подход при исследовании процессов переноса. Именно поэтому в классической гидродинамике предполагается, что устанавливается сначала локальное термодинамическое равновесие (ЛТР) в пределах ФБМО, и лишь затем наступает переход к глобальному термодинамическому равновесию, если оно вообще возможно для изучаемой системы. Тем самым неявно предполагается, что роль приграничных частиц в открытой термодинамической системе, какой является ФБМО, ничтожна. Зачастую приходится сталкиваться с убеждением, что возможные поправки, связанные с граничными эффектами, порядка диаметра частицы, и уточнение концепции ФБМО, например, в теории разреженных газов, не могут приводить к эффектам, имеющим практическое значение. Покажем, что подобная трактовка

классического определения ФБМО ошибочна.

Рассмотрим эту трактовку подробнее, поставив вопрос, как иногда говорят в физической кинетике, «о размере точки». Пусть имеются два соседних физически бесконечно малых объема $V_{m,1}$ и $V_{m,2}$ в неравновесной системе. Объему $V_{m,1}$ отвечает одночастичная функция распределения (ФР) $f_{m,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}, t)$, а объему $V_{m,2}$, соответственно, $f_{m,2}$. В первом приближении можно считать, что $f_{m,1}$ не изменяется в пределах $V_{m,1}$, также как $f_{m,2}$ не изменяется в пределах соседнего объема $V_{m,2}$. Именно это предположение и содержится неявно в теории Больцмана. Однако предположение является слишком грубым. Действительно, частица, испытавшая последнее столкновение в $V_{m,1}$ в окрестности границы двух объемов и направляющаяся в сторону $V_{m,2}$, вносит информацию о ФР $f_{m,1}$ в соседний объем $V_{m,2}$. Аналогично, частица на границе двух объемов, испытавшая последнее столкновение в $V_{m,2}$ и направляющаяся в сторону $V_{m,1}$, вносит информацию о ФР $f_{m,2}$ в соседний объем $V_{m,1}$. Релаксация по поступательным степеням свободы частиц одинаковых масс происходит за несколько столкновений. В результате на границе соседних физически бесконечно малых объемов образуются «кнудсеновские слои», характерный размер которых порядка длины пробега. Следовательно в ФР в ФБМО должна быть введена поправка, пропорциональная среднему времени *между* столкновениями и субстанциональной производной от измеряемой ФР (строгий вывод в [6]).

Пусть частица конечного радиуса характеризуется по-прежнему положением $\mathbf{r}$ в момент времени t ее центра масс, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда возможна ситуация, когда в некоторый момент времени t частица располагается на границе раздела двух объемов. При этом возможен эффект опережения (скажем для $V_{m,2}$), когда центр масс частицы, направляющейся в соседний объем $V_{m,2}$, еще находится в $V_{m,1}$. Но имеет место и эффект запаздывания, когда центр масс частицы, направляющейся в соседний объем (скажем $V_{m,2}$), уже находится в $V_{m,2}$,

но часть частицы еще принадлежит $V_{m,1}$.

Весь этот комплекс эффектов определяет нелокальные эффекты в пространстве и времени при редуцированном описании статистических систем.

Нелокальные эффекты могут быть продемонстрированы с помощью анимации движения частиц – твердых сфер в нейтральном газе. В Московской государственной академии тонкой химической технологии имени М.В. Ломоносова (МИТХТ) создан анимационный фильм по идее Б.В. Алексеева (авторы Б.В. Алексеев, В.В. Михайлов, Е. Михайлова), иллюстрирующий нелокальные эффекты. Обратимся к упомянутой анимационной картине.

Пусть в некотором объеме содержится однокомпонентный разреженный газ, в котором в основном происходят парные столкновения. С помощью пространственной сетки разобьем неравновесную физическую систему на открытые подсистемы – набор физически бесконечно малых объемов. Выделим один из этих малых объемов. Для наблюдения эволюции частиц в выделенном объеме и соседних малых объемах окрасим частицы и проследим за их движением. В выделенном объеме частицы окрашены в синий цвет; их достаточно много, для того чтобы говорить о возможности локального статистического описания на уровне одночастичной функции распределения (ФР) f . В соседних прилегающих малых объемах частицы окрашены в другие цвета, отвечающие другим функциям распределения, отличным от f . Частицы соседних объемов являются носителями информации о других ФР и, проникнув в «синий» объем, подстраиваются под «синюю» ФР (если речь идет о релаксации по поступательным степеням свободы) после нескольких столкновений. Пусть, для простоты, процесс релаксации требует лишь одного столкновения.

Иначе говоря, частица, проникшая в «синий» объем, меняет свой цвет на синий после первого же столкновения с «синей» частицей.

Воочию можно наблюдать, как в выделенном физически бесконечно малом объеме («синем» объеме) появляется приграничная «разноцветная» область, характерный размер которой порядка *средней длины пробега*. Ясно, что этот приграничный эффект будет существовать всегда при избранном методе диагностики независимо от способа разбиения системы набором физически бесконечно

малых открытых подсистем.

Этот факт и отражает существование нелокальных эффектов, пропорциональных средней длине пробега, числу Кнудсена или среднему времени τ между столкновениями частиц. Анимационный фильм может быть получен по запросу с кафедры физики МИТХТ; следует иметь в виду, что фильм занимает 34.8 МВ.

При выводе уравнения Больцмана (УБ)

$$Df/Dt = J^B(f) \quad (1.1)$$

где D/Dt есть субстанциональная производная, полностью игнорируются нелокальные эффекты, и УБ содержит только локальный интеграл столкновений J^B . Но указанные нелокальные эффекты несущественны только в равновесных системах, где кинетический подход переходит в методы статистической механики. Отсюда и проистекают трудности классической больцмановской физической кинетики.

Слабым местом классической больцмановской кинетической теории является и трактовка динамических свойств взаимодействующих частиц. С одной стороны, как следует из так называемого «физического» вывода УБ, больцмановские частицы рассматриваются как материальные точки, с другой стороны – интеграл столкновений в УБ приводит к появлению сечений столкновений.

Строгий подход к выводу кинетического уравнения относительно одночастичной ФР $f(KU_f)$ основан на использовании иерархии уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона (ББГКИ). Классическое уравнение Больцмана справедливо на двух масштабах, связанных, например, с гидродинамическим временем и средним временем между столкновениями частиц. Полученное уравнение KU_f превращается в УБ, если не учитывается изменение ФР на временах порядка времени столкновения (или, что то же самое, на длинах порядка радиуса взаимодействия частиц). Важно отметить, что учет этого третьего из упомянутых масштабов приводит до введения любых аппроксимаций, направленных на расщепление цепочки Боголюбова, к появлению дополнительных и, вообще говоря, однопорядковых членов в УБ [6–12].

Если KU_f выводится из ББГКИ методом корреляционных функций, то переход к УБ означает отказ от учета нелокальных эффектов. Структура KU_f , вообще говоря, выгля-

дит следующим образом

$$Df/Dt = J^B + J^{nl} \quad (1.2)$$

где J^{nl} – нелокальный интегральный член.

Поскольку нелокальные эффекты пропорциональны числу Кнудсена, то появляется возможность описания нелокальных эффектов в рамках двухмасштабной аппроксимации.

По сути, в обобщенной больцмановской физической кинетике предлагается локальная аппроксимация для второго интеграла столкновений [6]

$$J^{nl} = \frac{D}{Dt} \left(\tau \frac{Df}{Dt} \right), \quad (1.3)$$

где τ есть среднее время между столкновениями частиц. Можно провести аналогию с аппроксимацией Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК) для J^B

$$J^B = (f^{(0)} - f)/\tau \quad (1.4)$$

популярность которой для больцмановского интеграла столкновений объясняется тем колоссальным упрощением, которое достигается при ее использовании. Порядок величины отношения второго и первого членов правой части (1.2)

$$J^{nl}/J^B \approx O(Kn^2) \quad (1.5)$$

и при больших числах Кнудсена эти члены становятся однопорядковыми. Казалось бы, при малых числах Кнудсена, отвечающих гидродинамическому описанию, вкладом второго члена правой части (1.2) можно пренебречь.

Однако, это не так. При переходе к гидродинамическому приближению (после умножения кинетического уравнения на инварианты столкновений и последующего интегрирования по скоростям) больцмановская интегральная часть обращается в нуль, а второй член правой части (1.2) после указанного интегрирования не обращается в нуль и дает однопорядковый вклад при обобщенном навье-стоксовском описании. С математической точки зрения пренебрежение членом, содержащим малый параметр при старшей производной, не допустимо. С физической точки зрения, возникающие дополнительные члены, пропорциональные вязкости, соответствуют колмогоровской мелко-масштабной турбулентности. Итак, оказывается, что интегральный член J^{nl} оказывается существенным в теории процессов переноса и при малых, и при больших числах Кнудсена.

Этот факт определяет революционную ситуацию в теории процессов переноса,

поскольку дополнительные члены, введенные в уравнение Больцмана, не могут быть опущены даже в предельных случаях теории.

Тем самым уравнение Больцмана даже не соответствует классу минимальных моделей физики, являясь лишь правдоподобной моделью. Правдоподобные модели могут приводить к приемлемым результатам (зачастую после корректировки с помощью экспериментальных данных), но могут давать и «провальные» результаты (например, в теории турбулентности).

Отметим трактовку ОУБ с позиций теории флуктуаций:

$$Df^a/Dt = J^B(f), \quad (1.6)$$

$$f^a = f - \tau Df/Dt \quad (1.7)$$

Уравнения (1.6), (1.7) имеют правильный свободномолекулярный предел. Таким образом, $\tau Df/Dt$ есть флуктуация функции распределения, а запись в форме (1.6) без учета (1.7) делает УБ не замкнутым. С точки зрения теории флуктуаций Больцман использовал простейшую процедуру замыкания

$$f^a = f \quad (1.8)$$

Итак, кинетическая теория с учетом

$$(\rho - \rho^a)/\tau = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0), \quad (\rho \mathbf{v}_0 - (\rho \mathbf{v}_0)^a)/\tau = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \tilde{I} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{a}, \quad (1.11)$$

где $\tilde{I}$ – единичный тензор, $\mathbf{a}$ – ускорение, обусловленное действием массовых сил.

Структура записи уравнений (1.10), (1.11) весьма примечательна. Она может быть распространена на остальные обобщенные гидродинамические уравнения и напоминает уравнения двухжидкостной модели в теории сверхтекучести.

Известные уравнения Навье–Стокса приводят к весьма сложным проблемам существования и единственности решений. О.А. Ладыженской установлено, что даже при «мягких» начальных условиях для трехмерных течений единственное решение существует только на конечном временном интервале. Более того, О.А. Ладыженская даже предложила ввести в уравнения Навье–Стокса дополнительные члены с целью устранения этого недостатка классических гидродинамических уравнений (см. дискуссию в [13]). Обобщенные гидродинамические уравнения содержат вторые производные по времени и перекрестные производные «время – координаты» и лишены упомянутого недостатка.

Пусть теперь контрольный объем расположен в полости, ограниченной твердой стенкой. Запишем уравнения (1.11) в без-

нелокальных эффектов принципиально ведет к флуктуационным эффектам, пропорциональным среднему времени между столкновениями. Этот факт имеет общетеоретическое значение и не связан с конкретной аппроксимацией (1.3). Флуктуационные эффекты имеют место в любой открытой системе, ограниченной прозрачной для частиц контрольной поверхностью. Интересно отметить, что ОУБ позволяет включить в рассмотрение и высшие производные от ФР [6].

Обобщенное уравнение Больцмана (ОУБ)

$$\frac{D}{Dt} \left(f - \tau \frac{Df}{Dt} \right) = J^B(f) \quad (1.9)$$

приводит к обобщенным гидродинамическим уравнениям (ОГУ). Например, уравнение неразрывности записывается так

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0)^a = 0 \quad (1.10)$$

где ρ^a – плотность газа, $\mathbf{v}_0^a$ – гидродинамическая скорость движения потока, $(\rho \mathbf{v}_0)^a$ – плотность потока импульса без учета флуктуаций. Для случая локального максвелловского распределения имеем

размерном виде, используя в качестве масштаба длины l – расстояние от пробного контура до твердой стенки. Тогда вместо τ появится число Кнудсена $Kn_l = \lambda/l$. При $l \rightarrow 0$ $Kn_l \rightarrow \infty$, контур занимает всю полость, ограниченную твердыми стенками. Уравнения (1.10), (1.11) переходят в классические уравнения неразрывности и движения, при этом флуктуации на стенке исчезают.

Отсутствие флуктуаций гидродинамических величин на твердой поверхности является источником дополнительных граничных условий для ОГУ.

Переход к классическим гидродинамическим уравнениям вблизи твердой поверхности соответствует ламинарному подслою в турбулентном течении, а флуктуации гидродинамических величин – колмогоровским мелкомасштабным флуктуациям, которые табулируются из первых принципов физики [6–12].

Это означает, что создана строгая теория турбулентности, не требующая привлечения эмпирических моделей для расчета турбулентных течений.

Казалось бы, в механике сплошной среды

можно было бы вообще отказаться от принципа дискретности материи, рассматривая среду как сплошную в буквальном смысле этого термина. Такой подход, конечно, возможен, и в гидродинамике он приводит к уравнениям Эйлера. Но если мы собираемся учесть эффекты вязкости и теплопроводности, то положение радикально меняется. Как известно, динамическая вязкость пропорциональна среднему времени τ между столкновениями частиц и сплошная среда в эйлеровской модели при $\tau = 0$ означает отсутствие вязкости и теплопроводности. В гидродинамическом приближении среднее время между столкновениями τ связано с вязкостью η , $\tau \rho = \Pi \eta$, где множитель Π определяется моделью столкновения частиц, для нейтрального газа твердых сфер $\Pi \approx 0.8$ [14].

С точки зрения теории флуктуаций появление флуктуационных членов в ОУБ (и, в виде следствия, в ОГУ) обусловлено введением контрольного объема как элемента измерения в системе частиц конечного диаметра при сохранении ФР в виде, используемом для описания точечных бесструктурных частиц. Остается лишь отметить, что перечисленные эффекты всегда будут иметь место в кинетической теории при редуцированном одночастичном описании, в том числе в жидкости, электродинамике и теории гравитации «сплошных» сред, в плазме, где введение самосогласованных сил и обрезание радиуса их действия приводит к расширению возможностей ОУБ. В частности, в систему уравнений Максвелла должны быть введены флуктуации плотности заряда и плотности тока [6].

В общем случае параметр τ есть параметр нелокальности, и в квантовой гидродинамике [1] его величина связана соотношением неопределенности «время – энергия». В результате на квантовом уровне обобщенные гидродинамические уравнения переходят в уравнения квантовой гидродинамики, а уравнение Шредингера оказывается глубоким частным случаем обобщенных гидродинамических уравнений [1–3].

Это означает, что создана новая квантовая механика диссипативных процессов.

Отметим, что уравнение Шредингера и его эквивалентная гидродинамическая форма Маделунга не описывает диссипативные процессы и, следовательно, не может эффективно использоваться в нанотехнологии. Уравнение Больцмана принципиально

«не работает» на расстояниях порядка радиуса взаимодействия частиц и, следовательно, также не может эффективно использоваться при теоретическом исследовании проблем нанотехнологии даже в рамках «правдоподобных» моделей.

Для локальных статистических теорий установлено нарушение неравенств Белла и переход к нелокальному описанию неизбежен [15, 16]. Физика двадцать первого века – это нелокальная физика.

Итак, следующие выводы принципиального значения могут быть сделаны из предыдущего рассмотрения [1–3]:

1. Квантовая гидродинамика Маделунга эквивалентна уравнению Шредингера (УШ) и ведет к описанию эволюции квантовых частиц в форме уравнения Эйлера и «классического» уравнения неразрывности. УШ есть следствие уравнения Лиувилля как результат локальной аппроксимации нелокальных уравнений.

2. Обобщенная больцмановская физическая кинетика доставляет строгое описание нелокальных эффектов и после перехода к локальной аппроксимации приводит к параметру τ , который на квантовом уровне для УШ соответствует принципу неопределенности «время – энергия» Гейзенберга.

3. Обобщенные гидродинамические уравнения приводят к уравнению Шредингера как к глубокому частному случаю обобщенной больцмановской физической кинетики и, следовательно, нелокальной физики.

В принципе обобщенные квантовые гидродинамические уравнения не нуждаются в использовании соотношения неопределенности «время – энергия» для оценки величины параметра нелокальности τ . Более того, неравенство неопределенности «время – энергия» не является точным соотношением и с позиции нелокальной физики есть лишь простейшая оценка нелокальных эффектов. Действительно, рассмотрим два соседних физически бесконечно малых объема PhSV_1 и PhSV_2 в неравновесной системе. Очевидно, время τ должно уменьшаться с увеличением скорости u частиц, вторгающихся в ближайший соседний бесконечно малый объем (PhSV_1 или PhSV_2):

$$\tau = H/u^n \quad (1.12)$$

Но величина τ не может зависеть от направления скорости, поэтому естественно связать τ с кинетической энергией частицы

$$\tau = H/(\mu u^2), \quad (1.13)$$

где H есть коэффициент пропорциональности, который отражает состояние физической системы. В простейшем случае коэффициент H равен постоянной Планка $\hbar$ и соотношение (1.13) согласуется с неравенством Гейзенберга.

Действительно, следуя Гейзенбергу [17], рассмотрим одномерное движение частицы в системе координат, в которой средняя фазовая скорость частицы равна нулю, ($\overline{p_x} = 0$), а начало координат совпадает со средним положением частицы в указанной подвижной системе координат. Тогда средние квадратичные неточности в определении координаты частицы и ее импульса в теории Шредингера записываются через средние квадратичные значения координаты и им-

пульса частицы в виде [17]

$$\sqrt{(\Delta x)^2} \sqrt{(\Delta p_x)^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{p_x^2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.14)$$

или в терминах нелокального описания в представлении «энергия – время» в подвижной системе координат

$$m u^2 \tau \geq \hbar \quad (1.15)$$

Для квазистационарных систем неравенство (1.15) соответствует неопределенности энергии системы на интервале времени наблюдения τ .

Строгое рассмотрение приводит к следующей системе обобщенных гидродинамических уравнений [6] записанных в форме обобщенных уравнений Эйлера.

Обобщенное уравнение неразрывности для компонента α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_\alpha - \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho_\alpha \mathbf{v}_0 - \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \tilde{I} \cdot \frac{\partial p_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \right] \right\} = R_\alpha, \end{aligned} \quad (1.16)$$

Уравнение неразрывности для смеси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \sum_\alpha \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \sum_\alpha \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \tilde{I} \cdot \frac{\partial p_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

Уравнение движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_\alpha \mathbf{v}_0 - \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{\partial p_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right) \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \right] \right\} - \mathbf{F}_\alpha^{(1)} \left[\rho_\alpha - \tau_\alpha^{(0)} \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) \right) \right] - \\ - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \rho_\alpha \mathbf{v}_0 - \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{\partial p_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \right] \right\} \times \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + p_\alpha \tilde{I} - \tau_\alpha^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + p_\alpha \tilde{I}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha (\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \rho_\alpha (\mathbf{v}_0 \mathbf{V}_\alpha) \mathbf{V}_\alpha + \rho_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{v}_0) \mathbf{V}_\alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha) \mathbf{v}_0 \right) - \mathbf{F}_\alpha^{(1)} \rho_\alpha \mathbf{v}_0 - \rho_\alpha \mathbf{v}_0 \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] \mathbf{v}_0 - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha [\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}] \mathbf{V}_\alpha - \right. \\ \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \mathbf{v}_0 [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha [\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}] \right\} = \\ = \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha J_\alpha^{st,el} d\mathbf{v}_\alpha + \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha J_\alpha^{st,inel} d\mathbf{v}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Уравнение энергии для смеси:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho v_0^2}{2} + \frac{3}{2} p + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} - \sum_{\alpha} \tau_{\alpha}^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{\alpha} v_0^2}{2} + \frac{3}{2} p_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{\alpha} v_0^2 \mathbf{v}_0 + \frac{5}{2} p_{\alpha} \mathbf{v}_0 + \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_0 \right) - \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} \cdot \rho_{\alpha} \mathbf{v}_0 \right] \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 + \frac{5}{2} p \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} - \sum_{\alpha} \tau_{\alpha}^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{\alpha} v_0^2 \mathbf{v}_0 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{5}{2} p_{\alpha} \mathbf{v}_0 + \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_0 \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{\alpha} v_0^2 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{7}{2} p_{\alpha} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} p_{\alpha} v_0^2 \tilde{\mathbf{I}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{5}{2} \frac{p_{\alpha}^2}{\rho_{\alpha}} \tilde{\mathbf{I}} + \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \varepsilon_{\alpha} \frac{p_{\alpha}}{m_{\alpha}} \tilde{\mathbf{I}} \right) - \rho_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 - p_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{I}} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \rho_{\alpha} v_0^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} - \frac{3}{2} \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} p_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha} v_0^2}{2} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] - \frac{5}{2} p_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] - \right. \\
 & \left. - \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] - \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} \right] \right\} - \left\{ \mathbf{v}_0 \cdot \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} - \sum_{\alpha} \tau_{\alpha}^{(0)} [\mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_{\alpha} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot p_{\alpha} \tilde{\mathbf{I}} - \rho_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(1)} - q_{\alpha} n_{\alpha} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] \right) \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь $\mathbf{F}_{\alpha}^{(1)}$ — силы немагнитного происхождения, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\tilde{\mathbf{I}}$ — единичный тензор, q_{α} — заряд частицы компонента α , p_{α} — статическое давление для компонента α , $\mathbf{V}_{\alpha}$ — тепловая скорость, ε_{α} — внутренняя энергия для частиц компонента α , $\mathbf{v}_0$ — гидродинамическая скорость смеси.

2. Нестационарные одномерные гидродинамические уравнения в самосогласованном электрическом поле. Квантование в обобщенной квантовой гидродинамике.

Далее мы намерены получить решения типа солитонов из обобщенных гидродинамических

уравнений (ОГУ) плазмы, находящейся в самосогласованном электрическом поле. В этом случае все элементы возможного плазменного образования типа солитона должны двигаться с одной и той же поступательной скоростью. Следовательно, система ОГУ состоит из обобщенного уравнения Пуассона, отражающего эффекты флуктуации заряда и плотности потока заряда, двух уравнений неразрывности для положительно и отрицательно заряженных компонентов (в частности, для электронов и ионов), одного уравнения движения и двух уравнений энергии для положительно и отрицательно заряженных компонентов. Эта система шести нестационарных одномерных уравнений записывается в виде [1–3]:

(Уравнение Пуассона)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e \left\{ \left[n_i - \tau_i \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i u) \right) \right] - \left[n_e - \tau_e \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e u) \right) \right] \right\} \tag{2.1}$$

(Уравнение неразрывности для положительно заряженного компонента)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_i - \tau_i \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_i u - \tau_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u^2) + \frac{\partial p_i}{\partial x} - \rho_i F_i \right] \right\} \tag{2.2}$$

(Уравнение неразрывности для отрицательно заряженного компонента)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_e - \tau_e \left[\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e u) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_e u - \tau_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e u^2) + \frac{\partial p_e}{\partial x} - \rho_e F_e \right] \right\} \tag{2.3}$$

(Уравнение движения)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho u - \tau_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u) + \frac{\partial}{\partial x} (p_i + \rho_i u^2) - \rho_i F_i \right] - \tau_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u) + \frac{\partial}{\partial x} (p_e + \rho_e u^2) - \rho_e F_e \right] \right\} - \\ & - \rho_i F_i - \rho_e F_e + F_i \tau_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u) \right) + F_e \tau_e \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e u) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho u^2 + p - \tau_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u^2 + p_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u^3 + 3 p_i u) - 2 \rho_i u F_i \right] - \right. \\ & \left. - \tau_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u^2 + p_e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e u^3 + 3 p_e u) \right] - 2 \rho_e u F_e \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

(Уравнение энергии для положительно заряженного компонента)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_i u^2 + 3 p_i - \tau_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u^2 + 3 p_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u^3 + 5 p_i u) - 2 \rho_i F_i u \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_i u^3 + 5 p_i u - \tau_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u^3 + 5 p_i u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_i u^4 + 8 p_i u^2 + 5 \frac{p_i^2}{\rho_i} \right) - F_i (3 \rho_i u^2 + 5 p_i) \right] \right\} \\ & - 2 u \rho_i F_i + 2 \tau_i F_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i u^2 + p_i) - \rho_i F_i \right] = - \frac{p_i - p_e}{\tau_{ei}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

(Уравнение энергии для отрицательно заряженного компонента)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_e u^2 + 3 p_e - \tau_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u^2 + 3 p_e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e u^3 + 5 p_e u) - 2 \rho_e F_e u \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_e u^3 + 5 p_e u - \tau_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u^3 + 5 p_e u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_e u^4 + 8 p_e u^2 + 5 \frac{p_e^2}{\rho_e} \right) - F_e (3 \rho_e u^2 + 5 p_e) \right] \right\} \\ & - 2 u \rho_e F_e + 2 \tau_e F_e \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e u^2 + p_e) - \rho_e F_e \right] = - \frac{p_e - p_i}{\tau_{ei}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где u есть скорость поступательного движения квантового объекта, φ – скалярный потенциал, n_i и n_e суть числовые плотности заряженных компонентов, F_i и F_e – силы, действующие на единицу массы положительно и отрицательно заряженных частиц.

Используемые далее аппроксимации для нелокальных параметров τ_i , τ_e and τ_{ei} нуждаются в дополнительных пояснениях. Аппроксимации для τ_i и τ_e соответствуют записи (1.13) в форме

$$\tau_i = \hbar / m_i u^2, \tau_e = \hbar / m_e u^2 \quad (2.7)$$

Для нелокального параметра взаимодействия положительных и отрицательных частиц (в частности, электрон – ионного взаимодействия) τ_{ei} применимо соотношение

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_i} \quad (2.8)$$

В этом случае параметр τ_{ei} соответствует времени релаксации в процессе взаимодействия частиц различного сорта.

Преобразование (2.8) при $\hbar = \hbar$ согласуется с принципом неопределенности Гейзенберга. Из (2.8) следует

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{\tau_e + \tau_i}{\tau_e \tau_i} = \frac{\frac{\hbar}{m_e u^2} + \frac{\hbar}{m_i u^2}}{\frac{\hbar^2}{u^4} \frac{1}{m_e m_i}} = \frac{u^2}{\hbar} (m_e + m_i) \quad (2.9)$$

Поэтому

$$u^2 (m_e + m_i) \tau_{ei} = \hbar \quad (2.10)$$

Равенство (2.10) есть очевидное следствие соотношения неопределенности для комбинированной частицы, масса которой $m_i + m_e$.

В принципе временные параметры τ_i и τ_e должны рассматриваться в виде суммы среднего времени между столкновениями (τ_i^{tr}, τ_e^{tr}) и введенными выше нелокальными квантовыми величинами (τ_i^{qu}, τ_e^{qu}), а именно

$$\tau_i = \tau_i^{tr} + \tau_i^{qu} \quad (2.11)$$

Для молекулярного водорода в стандартных условиях среднее время между

столкновениями есть $6.6 \cdot 10^{-11}$ с. Для квантовых объектов, движущихся с типичными скоростями для плазмидов и шаровых молний, $\tau^{qu} \gg \tau^{ir}$, и обычное статическое давление p трансформируется в давление, которое может быть названо остаточным давлением нелокального происхождения. В определенном смысле это давление является аналогом давлением Бозе – конденсата. Для действующих сил справедливы соотношения

$$F_i = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, F_e = -\frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь введение квантования в квантовой гидродинамике. С этой целью запишем выражение для полной энергии E частицы, движущейся вдоль положительного направления оси x со скоростью u в поле кулоновских сил притяжения.

$$E = \frac{mu^2}{2} - \frac{Ze^2}{x} \quad (2.13)$$

где Z есть зарядовое число, а x есть расстояние от центра сил. Если движение подчиняется условиям нелокальности

$$mu^2 = H/\tau \text{ и } x = u\tau \quad (2.14)$$

то

$$E = \frac{H^2}{2mx^2} - \frac{Ze^2}{x} \quad (2.15)$$

Минимум полной энергии соответствует условию $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{x=x_B} = 0$, откуда

$$\frac{H^2}{mx_B^3} = \frac{Ze^2}{x_B^2} \quad (2.16)$$

Из (2.16) находим

$$x_B = \frac{H^2}{Zme^2} \quad (2.17)$$

Из (2.15), (2.17) получаем

$$E = \frac{H^2}{2m} \frac{Z^2 m^2 e^4}{H^4} - Ze^2 \frac{Zme^2}{H^2} = -\frac{Z^2 me^4}{2H^2} \quad (2.18)$$

Для атома с единственным электроном в оболочке, движущимся по боровской орбите радиуса r_B , выражение $\frac{H^2}{mr_B^3}$ с учетом

соотношений (2.14) записывается так

$$\frac{H^2}{mr_B^3} = \frac{mu^2}{r_B} \quad (2.19)$$

Сравнивая соотношения (2.16) и (2.19) обнаруживаем равенство кулоновской и инерциальной сил, действующих на орбитальный электрон

$$\frac{m_e u^2}{r_B} = \frac{Ze^2}{r_B^2} \quad (2.20)$$

и то же, что и (2.18) выражение для полной энергии орбитального электрона

$$E = -\frac{Z^2 m_e e^4}{2H^2} \quad (2.21)$$

Сравнение уравнения (2.21) с формулой Бальмера приводит к условию

$$H = n\hbar \quad (2.22)$$

где целые числа $n = 1, 2, \dots$ известны как главные квантовые числа, и общеизвестному равенству

$$E = -\frac{Z^2 m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.23)$$

Указанное рассмотрение, с одной стороны, является следствием уравнения Шредингера, а с другой стороны, явно носит характер простейшей механистической модельной картины. В частности, из уравнений (2.17), (2.20) находим характерную скорость движения электрона по орбите

$$u = \frac{Ze^2}{H} \quad (2.24)$$

плотности (включающую недиагональные элементы), а также матрицу остаточных квантовых давлений. Действительно, введем некоторые (главные) квантовые числа n_1 и n_2 , которые определяют возможные значения параметра нелокальности τ . Тогда, например

$$\tau_i = \frac{H}{m_i u^2} = \frac{n_1 \hbar}{m_i u^2}, \tau_e = \frac{H}{m_e u^2} = \frac{n_2 \hbar}{m_e u^2} \quad (2.25)$$

Поэтому,

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{\tau_e + \tau_i}{\tau_e \tau_i} = \frac{\frac{\hbar n_2}{m_e u^2} + \frac{\hbar n_1}{m_i u^2}}{\frac{\hbar^2}{u^4} \frac{1}{m_e m_i} n_1 n_2} = \frac{u^2}{\hbar} \frac{1}{n_1 n_2} (n_2 m_i + n_1 m_e) = \frac{u^2}{\hbar} \left(\frac{m_i}{n_1} + \frac{m_e}{n_2} \right) \quad (2.26)$$

На самом деле указанные соотношения ведут к необходимости введения многокомпонентной смеси квантовых газов, частицы которых находятся в различных квантовых состояниях, даже если они соответствуют электронной компоненте. Этот факт соответствует условию, что связанные электроны могут находиться на различных энергетических уровнях. Итак, правильное писать

$$\frac{1}{\tau_{e_2 i_1}} = \frac{u^2}{\hbar} \left(\frac{m_i}{n_{i1}} + \frac{m_e}{n_{e2}} \right) \quad (2.27)$$

для компонентов $e_1, e_2, \dots, i_1, i_2, \dots$. Очевидно, при $n_{i1} \neq n_{e2}$

$$\frac{1}{\tau_{e_2 i_1}} \neq \frac{1}{\tau_{e_1 i_2}} \quad (2.28)$$

и матрица плотности не является симметричной для различных компонентов, оставаясь симметричной отдельно для электронов и отдельно для ионов. Отметим, что каждому компоненту будет соответствовать свое остаточное квантовое давление, а значит и своя матрица, в данном случае квантовых давлений.

Как видим, приведенное исследование позволяет в принципе ввести квантизацию в квантовую гидродинамику без прямого использования уравнения Шредингера. Исследование строения многоэлектронного атома при этом трансформируется в численное решение уравнений гидродинамики для многокомпонентной среды, компоненты которой имеют различные квантовые числа n . Важно отметить, что условия квантования не являются «внутренним» свойством уравнения

Шредингера. Например, появление условий квантования в теории Шредингера для атома водорода связано с обрезанием бесконечных рядов и трансформации их в полиномы с конечным числом членов.

3. Квантовые солитоны в самосогласованном электрическом поле

Введем координатную систему, движущуюся вдоль положительного направления оси x в одномерном пространстве со скоростью $C = u_0$, равной фазовой скорости рассматриваемого квантового объекта

$$\xi = x - Ct \quad (3.1)$$

Принимая во внимание соотношение Де Бройля, следует ожидать, что групповая скорость u_g равна $2u_0$. В подвижной системе координат все зависимые гидродинамические величины являются функциями (ξ, t) . Мы исследуем возможность образования квантового объекта типа солитона. Для указанного типа решения в системе координат, движущейся с фазовой скоростью u_0 , не существует явной зависимости от времени. Запишем систему обобщенных гидродинамических уравнений (2.1) – (2.6) для двухкомпонентной смеси заряженных частиц (не обладающих внутренней энергией) в безразмерной форме. Безразмерные величины обозначаются знаком «тильда». Начнем с введения масштабов скорости

$$[u] = u_0 \quad (3.2)$$

и координаты x

$$\frac{\hbar}{m_e u_0} = x_0 \quad (3.3)$$

Обобщенное уравнение Пуассона (2.1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e \left\{ \left[n_i - \frac{\hbar}{m_i u^2} u_0 \left(-\frac{\partial n_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i \tilde{u}) \right) \right] - \left[n_e - \frac{\hbar}{m_e u^2} u_0 \left(-\frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e \tilde{u}) \right) \right] \right\} \quad (3.4)$$

записывается теперь в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}^2} = - \left\{ \frac{m_e}{m_i} \left[\tilde{\rho}_i - \frac{1}{\tilde{u}^2} \frac{m_e}{m_i} \left(-\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} (\tilde{\rho}_i \tilde{u}) \right) \right] - \left[\tilde{\rho}_e - \frac{1}{\tilde{u}^2} \left(-\frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} (\tilde{\rho}_e \tilde{u}) \right) \right] \right\} \quad (3.5)$$

если масштаб потенциала φ_0 и масштаб плотности ρ_0 выбраны так

$$\varphi_0 = \frac{m_e}{e} u_0^2 \quad (3.6)$$

$$\rho_0 = \frac{m_e^4}{4\pi \hbar^2 e^2} u_0^4 \quad (3.7)$$

Масштабированные силы описываются соотношениями (e – абсолютный заряд электрона)

$$\rho_i F_i = -\frac{u_0^2}{x_0} \rho_0 \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{\rho}_i \quad (3.8)$$

$$\rho_e F_e = \frac{u_0^2}{x_0} \rho_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{\rho}_e \quad (3.9)$$

Вообще говоря, при записи уравнения Пуассона должно учитываться и самосогласованное магнитное поле. При нормировке Лоренца классическое уравнение Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \{ \tilde{\rho}_e \tilde{u}^3 + 5 \tilde{p}_e \tilde{u} - \tilde{\rho}_e \tilde{u}^2 - 3 \tilde{p}_e \} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left\{ \frac{1}{\tilde{u}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(2 \tilde{\rho}_e \tilde{u}^3 + 10 \tilde{p}_e \tilde{u} - \tilde{\rho}_e \tilde{u}^4 - 8 \tilde{p}_e \tilde{u}^2 - 5 \frac{\tilde{p}_e^2}{\tilde{\rho}_e} - \tilde{\rho}_e \tilde{u}^2 - 3 \tilde{p}_e \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}} (3 \tilde{\rho}_e \tilde{u}^2 + 5 \tilde{p}_e - 2 \tilde{\rho}_e \tilde{u}) \right] \right\} - \\
& - 2 \tilde{\rho}_e \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}} + \\
& + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{1}{\tilde{u}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} (\tilde{\rho}_e \tilde{u}^2 + \tilde{p}_e - \tilde{\rho}_e \tilde{u}) - \tilde{\rho}_e \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\xi}} \right] = - (\tilde{p}_e - \tilde{p}_i) \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \tilde{u}^2.
\end{aligned} \quad (3.17)$$

Некоторые комментарии к уравнениям (3.12) – (3.17):

1. Каждое уравнение системы (3.12) – (3.17) есть дифференциальное уравнение второго порядка, требующее для своего решения два условия. Проблема принадлежит к классу задач Коши.

2. По сравнению с теорией Шредингера, связанной с постулированием поведения

$$u_0, x_0 = \frac{\hbar}{m_e} \frac{1}{u_0}, \varphi_0 = \frac{m_e}{e} u_0^2, \rho_0 = \frac{m_e^4}{4\pi\hbar^2 e^2} u_0^4, p_0 = \rho_0 u_0^2 = \frac{m_e^4}{4\pi\hbar^2 e^2} u_0^6$$

два параметра являются независимыми – фазовая скорость u_0 квантового объекта и внешний параметр H , который пропорционален постоянной Планка $\hbar$ и в общем случае должен быть введен в систему масштабов, как $x_0 = \frac{H}{m_e u_0} = \frac{n\hbar}{m_e u_0}$. В этом

случае происходит замена $\hbar \leftrightarrow H$ во всех масштабах. Но величина $v^{qu} = \hbar / m_e$ имеет размерность $[c \dot{\iota}^2 / \hbar]$ и может быть названа квантовой вязкостью, $v^{qu} = 1.1577 c \dot{\iota}^2 / \hbar$. Разумеется, масса электрона может быть заменена в масштабах массой других частиц, несущих отрицательный заряд. С этой точки зрения, полученные далее численные решения носят универсальный характер, определяемые только условиями Коши.

4. Результаты математического моделирования

Система (3.12) – (3.17) обобщенных квантовых гидродинамических уравнений приводит к обширному семейству решений в результате изменения двенадцати условий Коши, определяющих начальные возмущения зависимых переменных и формирующих условия образования солитонов. Последующие рисунки отображают результаты вычислений на основе уравнений системы (3.12) –

волновой функции на бесконечном удалении от объекта, здесь мы не налагаем никаких специальных условий на зависимые переменные, включая области их изменения. Эта область существования функции определяется автоматически в процессе решения задачи.

3. Из введенных масштабов только

(3.17) с помощью пакета Maple 9. На рисунках используются обозначения: ρ – плотность $\tilde{\rho}_i$, s – плотность $\tilde{\rho}_e$ (сплошные линии); u – скорость $\tilde{u}$ (пунктирная линия); p – давление $\tilde{p}_i$, q – давление $\tilde{p}_e$ (штрих пунктирные линии) и v – самосогласованный потенциал $\tilde{\varphi}$ (точечная кривая). Пояснения размещены под каждым рисунком. Программа Maple содержит характерные для этого пакета программ обозначения – например, выражение $D(u)(0) = 0$ означает в обычных обозначениях $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}}(0) = 0$; независимая переменная t

на оси абсцисс соответствует переменной $\tilde{\xi}$. Мы начинаем с проблемы принципиального значения – возможно ли после возмущений, определяемых условиями Коши, получить квантовый объект типа солитона, как результат самоорганизации заряженных частиц? В случае положительного ответа, что является причиной существования стабильного объекта? Именно эти вопросы принадлежат к числу главных проблем в теории шаровых молний.

С целью ответа на указанные вопросы обратимся к исследованию решений, порожденных возмущениями:

$$v(0)=1, r(0)=1, s(0)=1, u(0)=1, p(0)=1, q(0)=.95,$$

$$D(v)(0)=0, D(r)(0)=0, D(s)(0)=0, D(u)(0)=0, D(p)(0)=0, D(q)(0)=0$$

в смеси положительно и отрицательно заряженных ионов равных масс, если давление $\tilde{p}_i(0)$ положительных частиц больше чем давление $\tilde{p}_e(0)$ отрицательных частиц

(в рассматриваемом варианте $p(0)=1, q(0)=.95$). Последующие рис. 1 – 3 отображают результаты решения уравнений (3.12) – (3.17).

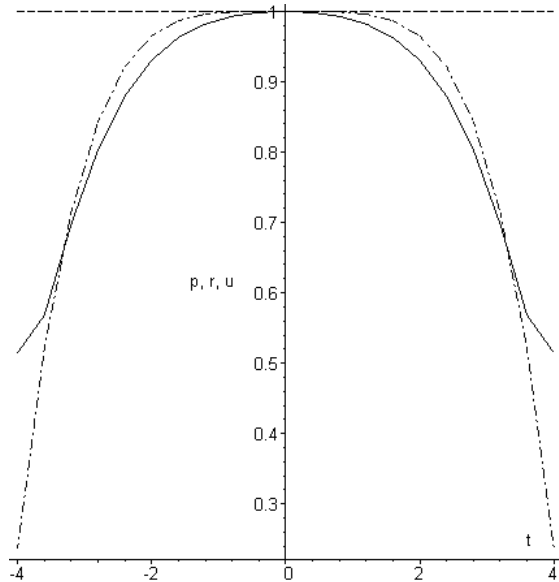


Рис.1. r – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$,
 p – давление $\tilde{p}_i$,

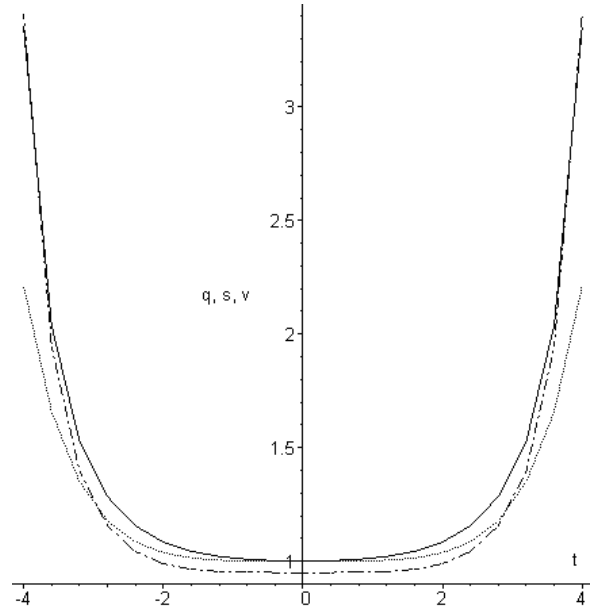


Рис.2. s – плотность $\tilde{\rho}_e$, q – давление $\tilde{p}_e$,
 v – самосогласованный потенциал $\tilde{\phi}$.

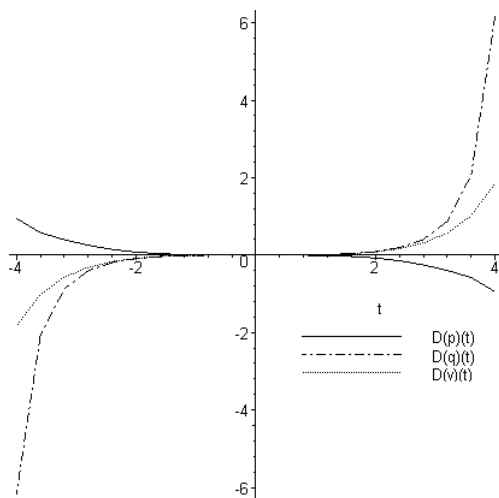


Рис. 3. Производная давления положительной компоненты $\partial \tilde{p}_i / \partial \xi$, производная давления отрицательной $\partial \tilde{p}_e / \partial \xi$, производная самосогласованного потенциала $\partial \tilde{\phi} / \partial \xi$ в квантовом солитоне.

Рис. 1, 2 соответствуют квантовому объекту, расположенному в ограниченной области одномерного пространства; все части этого объекта двигаются с одной и той же скоростью. Важно отметить, что никакие специальные граничные условия не используются в рассматриваемом расчете и последующих вычислениях. Следовательно,

этот солитон есть результат самоорганизации материи.

Рис. 3 содержит ответ на сформулированный выше вопрос о стабильности объекта. Объект ограничен отрицательной оболочкой. Производная $\partial \tilde{\phi} / \partial \xi$ пропорциональна самосогласованным силам, действующим на положительную и отрицательную части солитона. Рассмотрим, например, правую часть солитона. Самосогласованная сила сжимает положительно заряженную часть солитона и провоцирует движение отрицательной части вдоль положительного направления оси ξ (оси абсцисс t в обозначениях Maple). Но увеличение квантового давления $\tilde{p}_e$ препятствует разрушению солитона. Итак, устойчивость квантового объекта есть результат самосогласованного влияния электрического потенциала и квантового давления.

Интересно отметить, что устойчивость структуры объекта может быть также достигнута, когда солитон имеет *положительную оболочку и отрицательное ядро*, но $\tilde{p}_i(0) < \tilde{p}_e(0)$, см.

Рис. 4 – 6, которые отражают результаты математического моделирования для условий Коши:

$$v(0)=1, r(0)=1, s(0)=1, u(0)=1, p(0)=1, q(0)=1.05, D(v)(0)=0, \\ D(r)(0)=0, D(s)(0)=0, D(u)(0)=0, D(p)(0)=0, D(q)(0)=0.$$

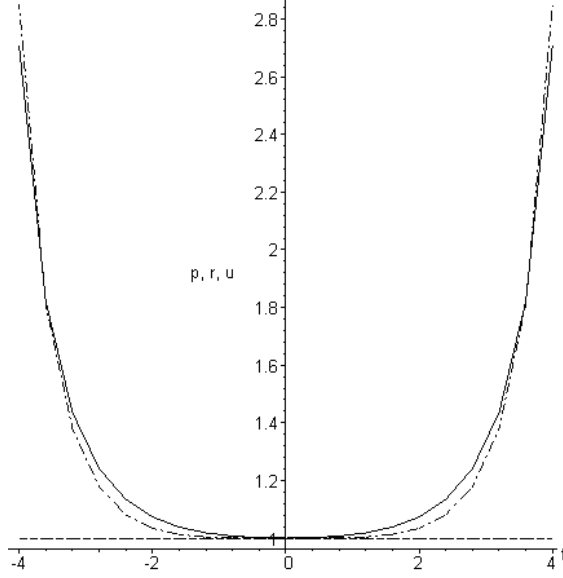


Рис. 4. r – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$,
 p – давление $\tilde{p}_i$

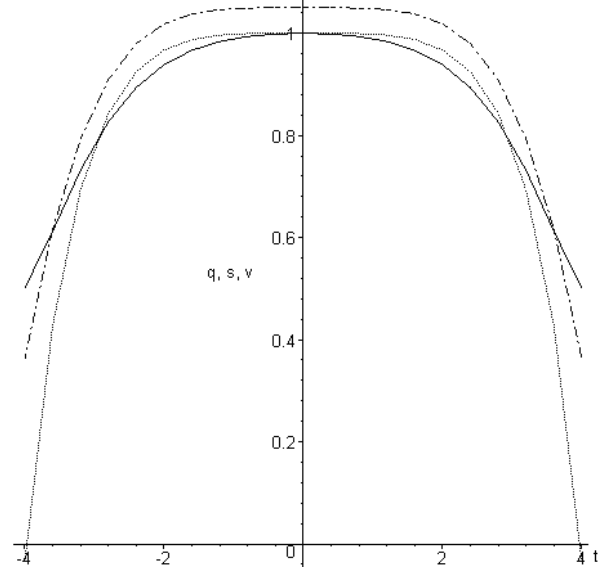


Рис. 5. s – плотность $\tilde{\rho}_e$, q – давление $\tilde{p}_e$,
 v – самосогласованный потенциал $\tilde{\phi}$.

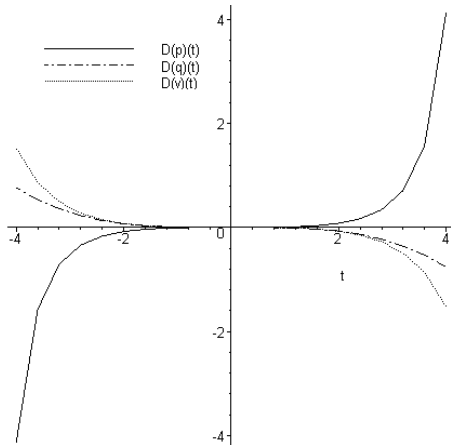


Рис. 6. Производная давления положительной компоненты $\partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\xi}$, производная давления отрицательной $\partial \tilde{p}_e / \partial \tilde{\xi}$, производная самосогласованного потенциала $\partial \tilde{\phi} / \partial \tilde{\xi}$ в квантовом солитоне.

Пояснения устойчивости объекта носят тот же характер, что и для предыдущего случая, но положительно и отрицательно заряженные компоненты меняются ролями. Во всех последующих расчетах используется типичное отношение масс для электрон – ионной компонент плазмы $m_i / m_e = 1838$. Первичное возмущение в смеси тяжелых положительно заряженных частиц и электронов приводит к образованию солитона с положительным ядром, если давление $\tilde{p}_i(0)$ ионов больше, чем $\tilde{p}_e(0)$ (для последующего варианта $p(0)=1, q(0)=.95$):

$$v(0)=1, r(0)=1, s(0)=1/1838, u(0)=1, \\ p(0)=1, q(0)=0.95, D(v)(0)=0, \\ D(r)(0)=0, D(s)(0)=0, \\ D(u)(0)=0, D(p)(0)=0, D(q)(0)=0.$$

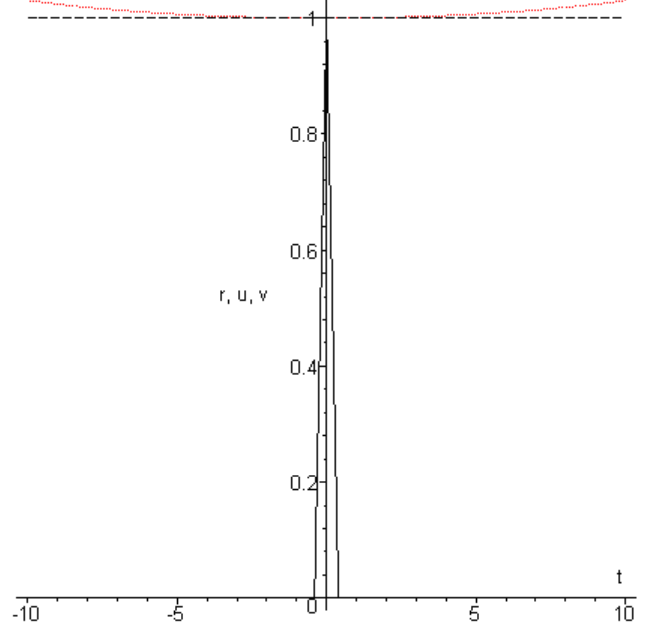


Рис. 7. r – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$, v – самосогласованный потенциал $\tilde{\phi}$ в квантовом солитоне.

По сравнению с рис. 1 – 3 мы наблюдаем ярко выраженное положительное ядро солитона, столь типичное для атомных структур.

Рассмотрим теперь влияние большого различия в массах компонентов ($m_i / m_e = 1838$) для случая, когда

$\tilde{p}_i(0) < \tilde{p}_e(0)$, (см. рис. 9 – 11). Мы используем условия Коши:

$$\begin{aligned} v(0)=1, r(0)=1, s(0)=1/1838, u(0)=1, \\ p(0)=1, q(0)=1.05, D(v)(0)=0, \\ D(r)(0)=0, D(s)(0)=0, D(u)(0)=0, \\ D(p)(0)=0, D(q)(0)=0 \end{aligned}$$

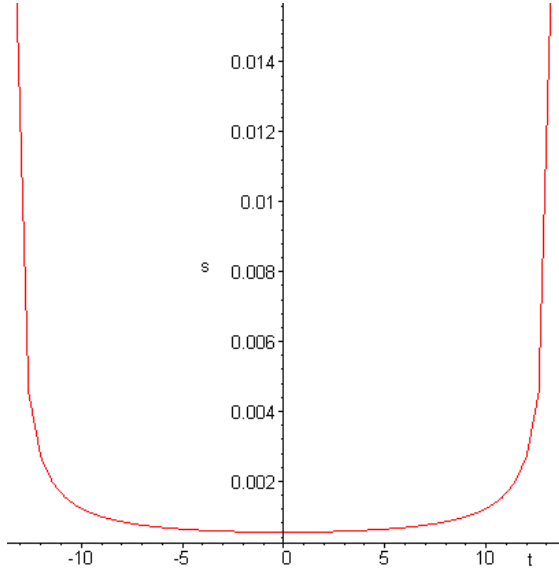


Рис. 8. s – плотность $\tilde{\rho}_e$ в квантовом солитоне.

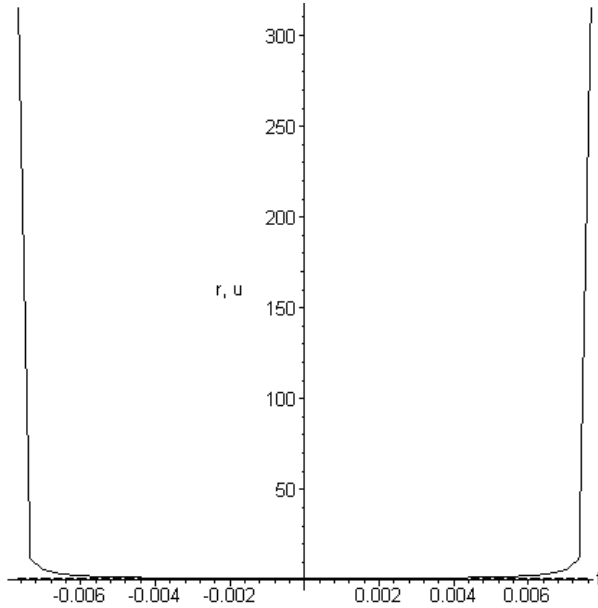


Рис. 9. r – плотность положительно заряженных частиц $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$.

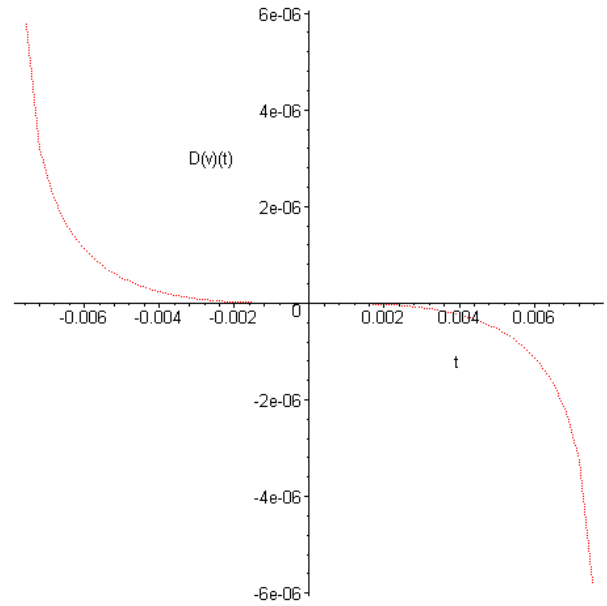


Рис. 10. Производная от самосогласованного потенциала $\partial\tilde{\varphi}/\partial\tilde{\xi}$ в квантовом солитоне.

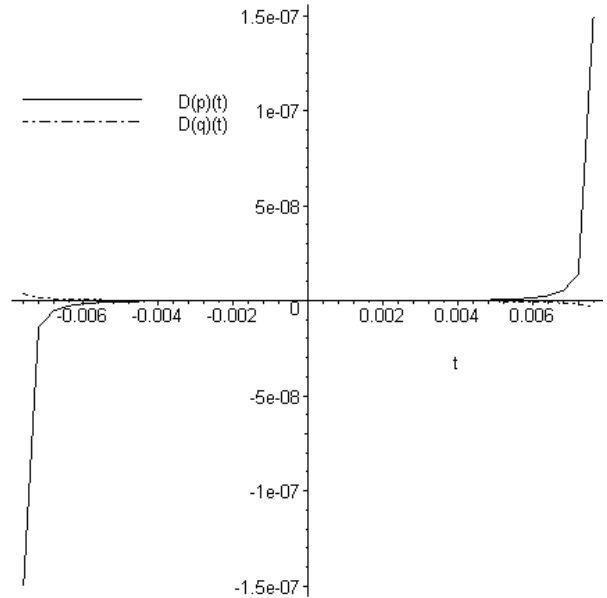


Рис. 11. Производная от давлений $\partial\tilde{p}_i/\partial\tilde{\xi}$ и $\partial\tilde{p}_e/\partial\tilde{\xi}$ в квантовом солитоне.

Рассмотрим влияние изменения остаточных нелокальных давлений $\tilde{p}_i(0)$, $\tilde{p}_e(0)$.

Рис. 12 – 14 соответствуют следующим условиям Коши:

$$\begin{aligned} v(0)=1, r(0)=1, s(0)=1/1838, u(0)=1, p(0)=1, q(0)=0.999, \\ D(v)(0)=0, D(r)(0)=0, D(s)(0)=0, D(u)(0)=0, D(p)(0)=0, D(q)(0)=0 \end{aligned}$$

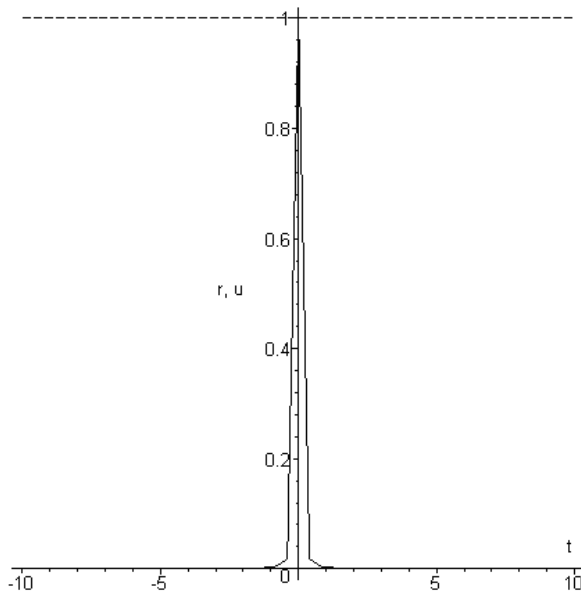


Рис. 12. r_i – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$ в квантовом солитоне.

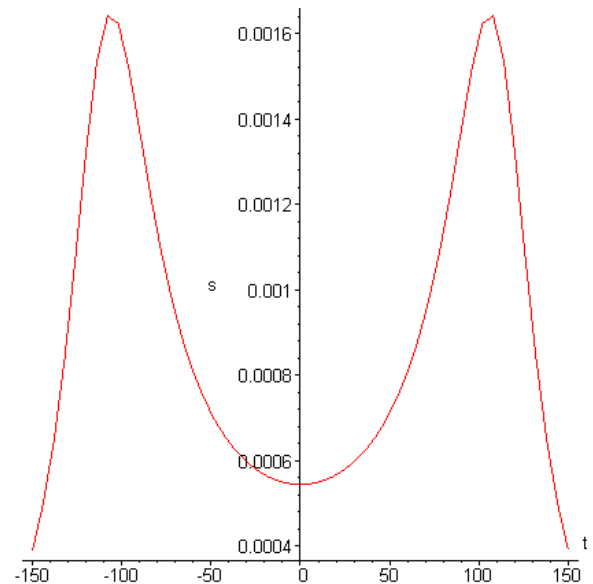


Рис. 13. s – плотность $\tilde{\rho}_e$ в квантовом солитоне.

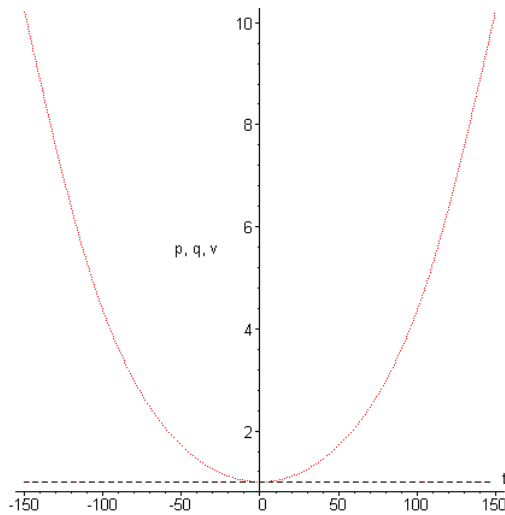


Рис. 14. v – самосогласованный потенциал $\tilde{\varphi}$ в квантовом солитоне и давления $\tilde{p}_i$, $\tilde{p}_e$.

Из рис. 7, 8 и 12 – 14 следует, что увеличение разности $p_i(0) - p_e(0)$ приводит к уменьшению характерной области, занятой солитоном. «Классическая» конфигурация с положительным ядром и отрицательной оболочкой существует, если только $\tilde{p}_i(0) > \tilde{p}_e(0)$. В противоположном предельном случае $\tilde{p}_i(0) < \tilde{p}_e(0)$ математическое моделирование предсказывает возможность существования устойчивых образований с отрицательным ядром и положительной оболочкой. Продемонстрируем возможность образования солитонов при наличии весьма значительного отличия первичных возму-

щений от использованных масштабов. В последующих рис. 15, 16 это отличие в 10^5 раз больше соответствующих масштабных величин.

$$\begin{aligned} v(0) &= 10^5, \quad r(0) = 10^5, \\ s(0) &= (10^5)/1838, \quad u(0) = 1, \\ p(0) &= 10^5, \quad q(0) = 0.95 \cdot 10^5, \\ D(v)(0) &= 0, \quad D(r)(0) = 0, \quad D(s)(0) = 0, \\ D(u)(0) &= 0, \quad D(p)(0) = 0, \quad D(q)(0) = 0. \end{aligned}$$

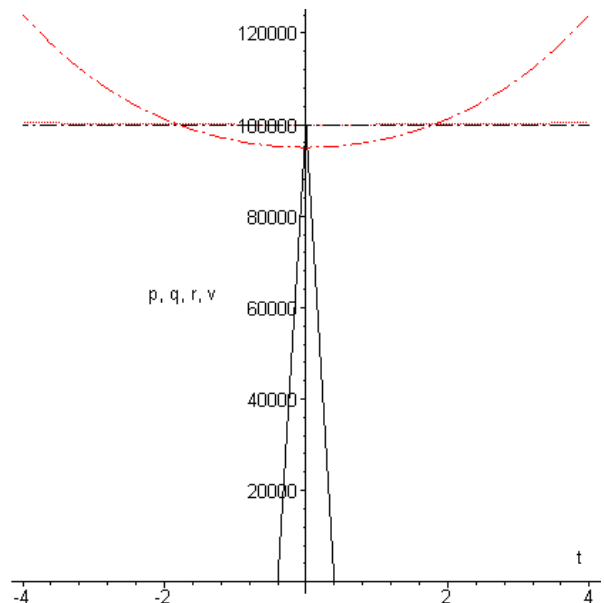


Рис. 15. r_i – плотность $\tilde{\rho}_i$, p – давление $\tilde{p}_i$, q – давление $\tilde{p}_e$, v – самосогласованный потенциал $\tilde{\varphi}$ в квантовом солитоне.

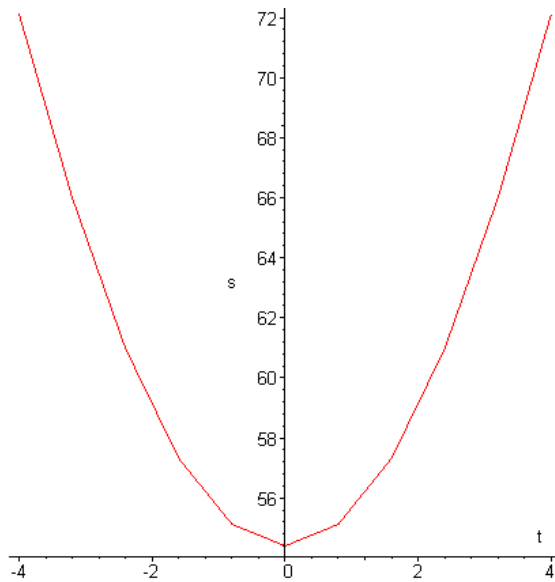


Рис. 16. s – плотность $\tilde{\rho}_e$ в квантовом солитоне.

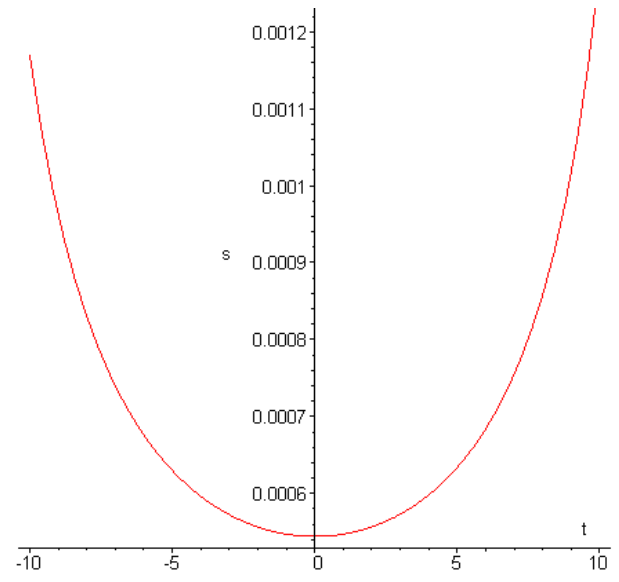


Рис. 18. s – плотность $\tilde{\rho}_s$ в квантовом солитоне.

Рассмотрим теперь влияние первичных возмущений, обусловленных изменением градиента потенциала. С этой целью сравним результаты, найденные при условии $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi}(0) = 0$ (рис. 7, 8) с расчетами $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \xi}(0) = 1$ (рис. 17 – 19):

$$\begin{aligned} v(0) &= 1, r(0) = 1, s(0) = 1/1838, \\ u(0) &= 1, p(0) = 1, q(0) = .95, D(v)(0) = 1, \\ D(r)(0) &= 0, D(s)(0) = 0, D(u)(0) = 0, \\ D(p)(0) &= 0, D(q)(0) = 0. \end{aligned}$$

Как следует из рис. 7, 8, 17 – 19, даже весьма значительное изменение начального градиента потенциала не приводит к разрушению солитона.

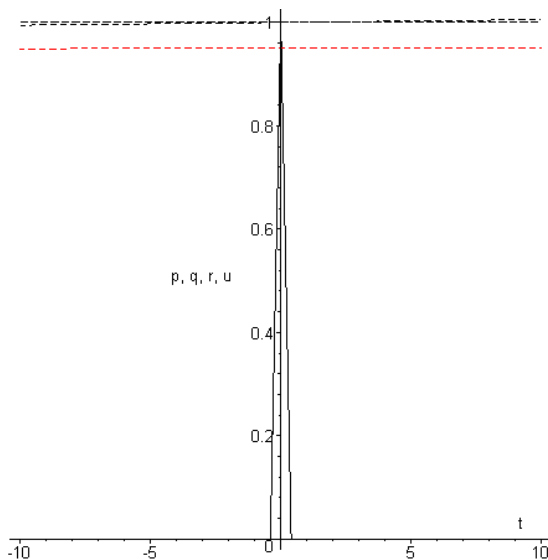


Рис. 17. r – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$, p – давление $\tilde{p}_i$, q – давление $\tilde{p}_e$.

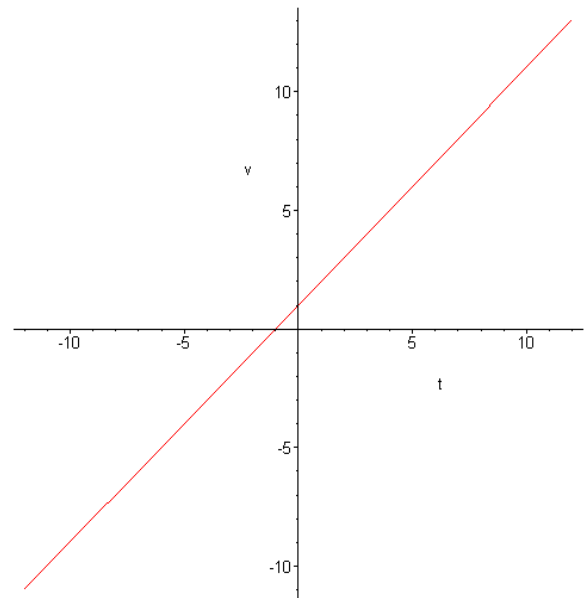
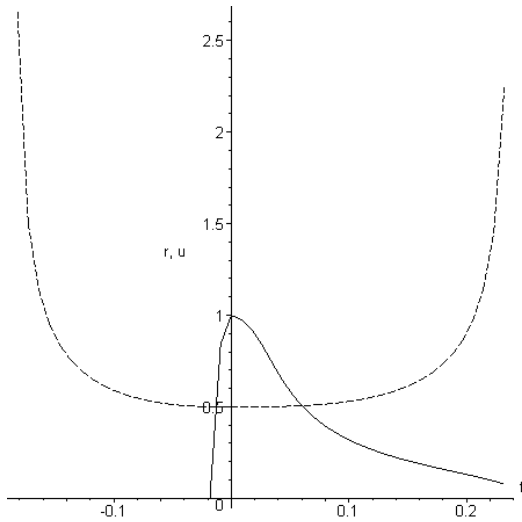


Рис. 19. v – самосогласованный потенциал $\tilde{\phi}$ в квантовом солитоне.

Важно отметить, что все элементы солитона движутся с одной и той же скоростью, если начальное возмущение $\tilde{u}(0) = 1$ соответствует фазовой скорости. Последующий расчет (рис. 20) демонстрирует разрушение солитона, если начальное возмущение приводит к иной скорости объекта ($\tilde{u}(0) = 0.5$) в условиях Коши

$$\begin{aligned} v(0) &= 1, r(0) = 1, s(0) = 1/1838, \\ u(0) &= 0.5, p(0) = 1, q(0) = 0.95, \\ D(v)(0) &= 0, D(r)(0) = 0, D(s)(0) = 0, \\ D(u)(0) &= 0, D(p)(0) = 0, D(q)(0) = 0. \end{aligned}$$

Рис. 20. r – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$.

Рассмотрим в заключение ситуацию, когда солитон захватывается внешним периодическим продольным электрическим полем $F_i^{(prot)} = \frac{eE}{m_i} \cos(kx - \omega t)$, для которого фазовая скорость равна $\omega/k = u_0$. В этом случае

$$\rho_i F_i^{(prot)} = \frac{eE}{m_i} \rho_0 \tilde{\rho}_i \cos \left[2\pi \frac{\hbar}{\lambda m_e u_0} \tilde{\xi} \right] \quad (4.1),$$

а эффективные силы, действующие на положительные и отрицательные заряды, записываются так

$$\rho_i F_i^{(pot)} + \rho_i F_i^{(prot)} = -\frac{u_0^2}{x_0} \frac{m_e}{m_i} \rho_0 \tilde{\rho}_i \left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\xi}} - \tilde{E} \cos \left(2\pi \frac{\hbar}{\lambda m_e u_0} \tilde{\xi} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$\rho_e F_e^{(pot)} + \rho_e F_e^{(prot)} = \frac{u_0^2}{x_0} \rho_0 \tilde{\rho}_e \left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\xi}} - \tilde{E} \cos \left(2\pi \frac{\hbar}{\lambda m_e u_0} \tilde{\xi} \right) \right] \quad (4.3)$$

Выражения (4.2), (4.3) должны быть введены в систему квантовых гидродинамических уравнений (3.12) – (3.17). Амплитуда $\tilde{E}$ и коэффициент $\tilde{\Lambda} = 2\pi \frac{\hbar}{\lambda m_e u_0}$ являются параметрами расчетов. Приведем типичный результат вычислений во внешнем (и самосогласованном) резонансном электрическом поле для следующих условий Коши при $\tilde{E}=1$, $\tilde{\Lambda}=1$ and $\tilde{p}_e(0) = \tilde{p}_i(0)$:

$$\begin{aligned} v(0) &= 1, r(0) = 1, s(0) = 1/1838, \\ u(0) &= 1, p(0) = 1, q(0) = 1, \\ D(v)(0) &= 0, D(r)(0) = 0, D(s)(0) = 0, \\ D(u)(0) &= 0, D(p)(0) = 0, D(q)(0) = 0 \end{aligned}$$

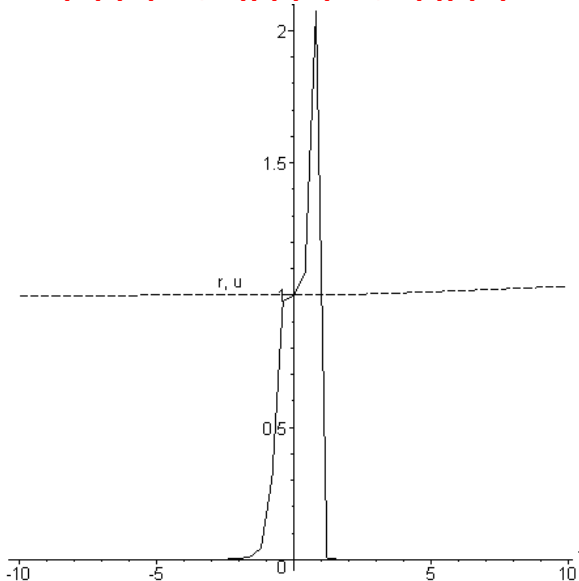
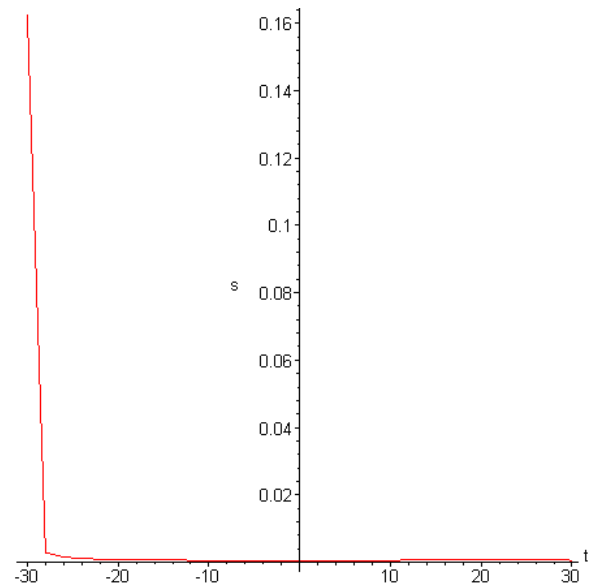
Рис. 21. r – плотность $\tilde{\rho}_i$, u – скорость $\tilde{u}$.Рис. 22. s – плотность $\tilde{\rho}_s$.

Рис. 21 – 24 отражают результаты вычислений (волнистая наклонная линия рисунка 24 соответствует давлению электронного компонента).

Заключение

Появление в математике уравнений, имеющих решение в виде солитонов, всегда было редким и большим событием. Как видим, обобщенная квантовая гидродинамика оперирует солитонами, как «рабочим» объектом теории. Открытие квантовых солитонов, трактовка этих солитонов как отражение атомных структур на микроскопическом уровне и шаровых молний на макроскопическом уровне, переводит квантовые расчеты на принципиально иной

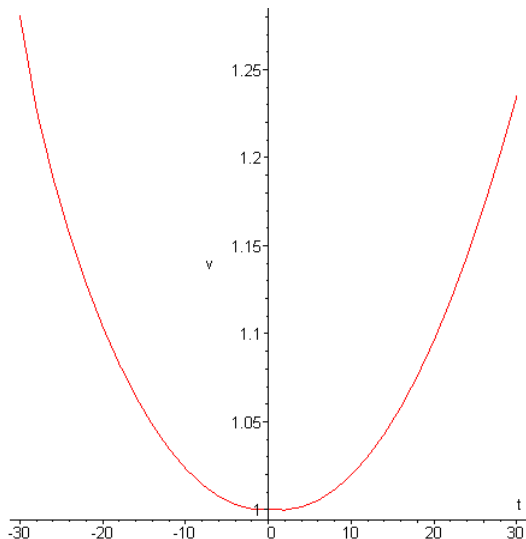


Рис. 23. v – самосогласованный потенциал $\tilde{\varphi}$.

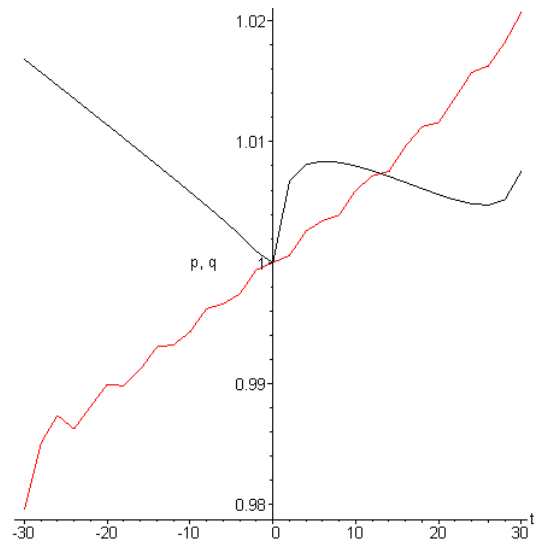


Рис. 24. p – давление $\tilde{p}_i$, q – давление $\tilde{p}_e$.

уровень. Открываются широкие возможности управления такими объектами, например, создание квантовых структур с инверсными ядром и оболочкой. Расчеты, проведенные в резонансном электрическом поле, доставляют еще одну исключительно важную возможность управления такими объектами. Именно, при равенстве давлений заряженных компонентов объект существует как солитон только во внешнем резонансном поле. Выключение поля немедленно приводит к разрушению солитона.

Укажем еще раз, что солитоны существуют как стабильные объекты в результате уравнивания сил квантовых давлений нелокального происхождения и самосогласованных электрических сил. Эти эффекты служат объяснением существования шаровых молний, доставляют принципиально новые возможности в нанoeлектронике.

Укажем, что квантовая механика Шредингера – Маделунга полностью лишена этих возможностей, хотя бы потому, что не содержит уравнения энергии в принципе.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Alexeev, B. V. Generalized Quantum Hydrodynamics and Principles of Non-Local Physics / B. V. Alexeev // J.Nanoelectronics and Optoelectronics. – 2008. – Vol. 3. – P. 143.
2. Алексеев, Б. В. Обобщенная квантовая гидродинамика / Б. В. Алексеев // Вестник МИТХТ. – 2008. – Т. 3, № 3. – С. 3–19.
3. Alexeev, B. V. Mathematical Modeling of Soliton's Evolution in Generalized Quantum Hydrodynamics / B. V. Alexeev // ArXiv: 0804.3489. – 2008. – P. 24.
4. Алексеев, Б. В. Избранные главы квантовой механики / Б. В. Алексеев. – М.: РИО МИТХТ, 2003. – 53 с.
5. Алексеев, Б. В. Обобщенная квантовая гидродинамика и принципы нелокальной физики / Б. В. Алексеев. – / Б. В. Алексеев. – М.: РИО МИТХТ, 2007. – 43 с.
6. Alexeev, B. V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics / B. V. Alexeev // NY: Elsevier, 2004. – 368 p.
7. Алексеев, Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов / Б. В. Алексеев. – М.: Наука, 1982. – 420 с.
8. Alexeev, B. V. The Generalized Boltzmann Equation, Generalized Hydrodynamic Equations and their Applications / B. V. Alexeev // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. – 1994. – / B. V. Alexeev // Vol. 349. – P. 417–443.
9. Alexeev, B. V. The Generalized Boltzmann Equation / B. V. Alexeev // Physica A. – 1995. – 216. – P. 459–468.
10. Алексеев, Б. В. Обобщенная Больцмановская физическая кинетика. Обзор / Б. В. Алексеев // Теплофизика высоких температур. – 1997. – Т. 35, № 1. – С. 129–146.
11. Алексеев, Б. В. Физические основы обобщенной Больцмановской кинетической теории газов. Обзор / Б. В. Алексеев // Успехи физических наук. – 2000. – Т. 170, № 6. – С. 649.
12. Алексеев, Б. В. Физические принципы обобщенной Больцмановской кинетической теории ионизированных газов. Обзор / Б. В. Алексеев // Успехи физических наук. – Т. 173, № 2. – С. 139.
13. Климонтович, Ю. Л. О возможности и необходимости объединенного описания гидродинамических процессов / Ю. Л. Климонтович // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 92, № 2. – С. 312.
14. Chapman, S. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases / S. Chapman, T. G. Cowling. – Cambridge: At the University Press, 1952. – 510 p.
15. Bell, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox / J. S. Bell // Physics. – 1964. Vol. 1. – P. 195.
16. Aspect, A. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analysers / A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger // Phys. Rev. Lett. – 1982. – Vol. 49. – P. 1804.
17. Heisenberg, W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik / W. Heisenberg // Zeitschrift für Physik – 1927. – Vol. 43. – 172 – 198.