

Э.М. Карташов,
Т.В. Анисимова
МИТХТ им. М.В. Ломоносова

ЛОКАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ И ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

УДК:539.3

Исследуется поведение полимерного образца цилиндрического вида (полимерные волокна) с внутренней изолированной круговой трещиной при растяжении постоянным напряжением (ползучесть) и тепловом нагреве, когда тепловой поток направлен вдоль оси симметрии образца по нормали к трещине. Рассчитываются локальные напряжения (механическое и термоупругое) в окрестности круговой трещины и температура, что позволяет описать термокинетику процесса разрушения при испытании и вычислить соответствующую долговечность. Приводится ряд обобщающих соотношений для коэффициентов интенсивности напряжений при механических и тепловых нагрузках, представляющих практический интерес.

Введение. В основе идеологической схемы исследования кинетики процесса разрушения полимерных материалов теоретическими методами лежит аналитическое соотношение для скорости роста трещины как функции ее текущей длины $l(t)$, поля напряжений σ^* в области V_a (флуктуационный объем) дефекта $l(t)$, температуры в вершине трещины $T_e(l)$ и молекулярных констант, характеризующих структуру полимера, а также элементарный акт разрыва напряженных химических (или межмолекулярных) связей

$$v = v(l; \sigma^*; T_e(l); V_a; U; \dots) \quad (1)$$

где $U = U_0 - qT_e$ — энергия активации процесса разрыва связей в вершине трещины.

Основная трудность при этом состоит в получении конкретного выражения для формулы (1) с учетом основных физических закономерностей кинетики процесса разрушения, выявленных экспериментально для данного случая, и их влияния на его элементарный акт в

объеме V_a . Эта задача в достаточно общей постановке рассмотрена в [1].

Как следует из (1), величина локального напряжения σ^* является одной из важнейших характеристик в данной методологической схеме исследования и рассчитывается методами механики хрупкого разрушения на основе решения соответствующей задачи математической теории трещин. Температура в вершине трещины $T_e(l)$ рассчитывается на основе решения соответствующей краевой задачи теплопроводности твердых тел с разрывными граничными условиями на линиях (берегах трещины) с использованием специального математического аппарата [1]. Фактически на основе выражения (1) изучается взаимное влияние макро- и микростадий процесса разрушения, определяются основные параметры и предельные характеристики указанного процесса, и, наконец, рассчитывается долговечность образца в тех или иных условиях испытаний как обратная интегральная величина (1).

$$\tau(\sigma, T_a) = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{v(l, \sigma^*, T_a(l), V_a, U, \dots)} \quad (2)$$

где l_0, l_k — начальная и критическая длина трещины соответственно.

Теоретические исследования термокинетики роста трещины в полимерных пленках детально рассмотрены в [1, 2]. Ниже рассчитываются основные величины в соотношении (1) для полимерных волокон.

В качестве математической модели образца цилиндрического типа с внутренней дискообразной изолированной трещиной можно принять упругое пространство (x, y, z) с разрезом в плоскости $z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, учитывая экспериментальные данные о весьма

малых размерах внутренних микротрещин в полимерных волокнах при диаметре образца в несколько миллиметров, а также о независимости критического диаметра трещины от величины поперечного сечения образца.

Коэффициенты интенсивности напряжений при механическом и тепловом нагружении. Теория хрупкого разрушения полимеров в неизотермических условиях является наименее разработанной областью исследований в физике прочности твердых тел. Экспериментальные данные в [1] показывают, что случаи установившегося теплового состояния $T(x,y,z)$ в твердых телах с трещинами представляют особый интерес для теории неизотермического разрушения с позиций кинетической

термофлуктуационной концепции: необходимо описать рост трещины разрушения и вычислить соответствующую долговечность (2). При этом могут быть рассмотрены совместные случаи механического (растяжение образца при постоянном напряжении σ) и теплового (вектор $\text{grad}T$ направлен вдоль оси симметрии образца ортогонально круговой трещине) нагружения, а также каждый из них в отдельности.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) в условиях симметрии относительно оси z , а также симметрии относительно плоскости $z=0$, сформулированная задача сводится к решению термоупругой осесимметричной задачи для полупространства $z \geq 0$, состоящей из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad z > 0, \quad r > 0 \quad (3)$$

геометрических

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (4)$$

физических

$$\sigma_{ii} = 2G \left[\varepsilon_{ii} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} e - \frac{1+\nu}{(1-2\nu)} \alpha_T \cdot T \right]; \quad \sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz} \quad (5)$$

Здесь: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r, z)$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(r, z)$ – компоненты, соответственно, тензора напряжения и деформации ($i, j = r, \varphi, z$), $U = U(r, z)$, $W = W(r, z)$ – компоненты вектора перемещения, соответственно, в радиальном и осевом направлениях, $T = T(r, z)$ – температурная функция, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, $e(r, z) = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}$.

Граничные условия:

$$\sigma_{zz}(r, z)|_{z=0} = -\sigma, \quad 0 \leq r < R; \quad \sigma_{rz}(r, z)|_{z=0} = 0, \quad r \geq 0; \quad W(r, z)|_{z=0} = 0, \quad r > R; \\ |\sigma_{ij}(r, z), W(r, z), U(r, z), \varepsilon_{ij}(r, z)| < \infty, \quad r \geq 0, \quad z \geq 0. \quad (6)$$

Входящая в (5) температурная функция является решением задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0, r > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\lambda_T} q_T, \quad 0 \leq r < R, \quad (8)$$

$$T(r, z)|_{z=0} = 0, \quad r > R, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0, \quad r > 0, \quad (10)$$

где λ_T – теплопроводность материала, q_T – величина теплового потока, поступающего в образец через единицу площади за единицу времени.

Подобная задача при наличии только механических нагрузок изучалась Снеддоном, а при наличии только температуры (на поверхности трещины) – Шейлом. Бородачев рассмотрел в исходной постановке оба случая, обобщив при этом частные зависимости Гудьера и Флоренса, а также Снеддона и Ловенгруба (ссылки в [2]). Ниже дается иной подход к решению задачи для случая (8)–(9) – более рациональный с точки зрения общности получаемых результатов. Вследствие громоздкости результатов, далее укажем лишь основную идею подхода.

Введем термоупругий потенциал перемещений $\Phi(r, z)$ соотношениями [1]

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (e(r, z) = \Delta \Phi(r, z)). \quad (11)$$

Тогда приведенную задачу (3)–(5) можно записать в перемещениях:

$$\Delta U - \frac{1}{r^2} U + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \Delta W + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

Подставив соотношения (11) в (12) и проинтегрировав первое из них по r , второе – по z , находим: $\Delta \Phi(r, z) = \frac{(1+\nu)\alpha_T}{1-\nu} T(r, z)$.

Если найдено какое-либо частное решение уравнения относительно $\Phi(r, z)$, то деформации и напряжения могут быть вычислены на основе этого решения следующим образом:

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad \tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}; \quad \tilde{\varepsilon}_{rz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}; \quad (13)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \Delta \Phi \right); \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta \Phi \right); \quad \tilde{\sigma}_{zz} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \Delta \Phi \right); \quad \tilde{\sigma}_{rz} = 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \quad (14)$$

Дальнейшее решение основано на применении интегрального преобразования Ханкеля, что приводит к следующим результатам:

$$\tilde{\sigma}_{zz}(r, 0) = -\frac{2G}{\pi(1-\nu)} \int_0^R \frac{\eta d\eta}{(r^2 - \eta^2)^{3/2}} \int_0^\eta \frac{yh(y)dy}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} - \frac{(1+\nu)\alpha_T G}{(1-\nu)} T(r, 0). \quad (15)$$

где $h(r) = -\frac{1-\nu}{G} \sigma + (1+\nu)\alpha_T T_0(r)$; $T_0(r) = T(r, 0) \quad 0 \leq r < R$.

По Ирвину (ссылки в [1,2]) асимптотика напряжения $\tilde{\sigma}_{zz}$ в окрестности круговой трещины имеет вид $[\tilde{\sigma}_{zz}(r, 0)]_{\max} = \frac{K(\sigma, R)}{\sqrt{2(r-R)}}$, $r > R$, где $K(\sigma, R)$ – коэффициент интенсивности напряжений, параметр, отражающий перераспределение напряжений в теле, вследствие наличия трещины: $K(\sigma, R) = \lim_{r \rightarrow R+0} \sqrt{2(r-R)} [\tilde{\sigma}_{zz}(r, 0)]$. Искомое локальное механическое напряжение в окрестности круговой трещины можно описать выражением $\sigma_{(M)}^* = (\sqrt{2}/\pi) \sigma \sqrt{R/\lambda}$, где λ – флуктуационное продвижение трещины, а в окончательной форме $\sigma_{(M)}^* = \sigma \beta(R_0) \sqrt{R/R_0}$, где $R = R(t)$ – переменный радиус растущей трещины; $2R_0$ – диаметр начальной (исходной в образце) круговой микротрещины; $\beta(R_0) = 0,5\sqrt{R_0/\lambda}$ – коэффициент концентрации напряжения для внутренней круговой трещины. Отсюда находим оценку диаметра начальных микротрещин в полимерных волокнах: $R_0 = 4\lambda\beta^2$. Согласно [1] для ориентированных

волокон (полиэтилен; полипропилен; поликапроамид) величина $\lambda = 4 \text{ \AA}$, $\beta \approx (4-7)$. Откуда по формуле $R_0 = 4\lambda\beta^2$ получаем радиус начальной микротрещины $R_0 = (10^{-8} - 10^{-7}) \text{ м}$, что подтверждено экспериментально [2].

Основные соотношения для локального напряжения при чисто тепловом нагружении имеют вид:

$$[\tilde{\sigma}_{zz}(r,0)]_{\max}^{(T)} = A \left[\frac{H(R)}{\sqrt{r^2 - R^2}} - \int_0^R \frac{H'(\eta)d\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \right], \quad (r > R), \quad H(\eta) = \int_0^\eta \frac{y\sqrt{R^2 - y^2}}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} dy, \quad A = \frac{2E\alpha_T q_T}{\pi^2(1-\nu)\lambda_T}$$

Отсюда искомое локальное напряжение в окрестности круговой трещины в рамках тепловой задачи (7)-(10) имеет вид: $\sigma_{(T)}^* = \sigma_T \beta(R_0)(R/R_0)^{3/2}$, где $\sigma_T = \frac{0,3\alpha_T q_T E R_0}{(1-\nu)\lambda_T}$;

$$\beta(R_0) = 0,5\sqrt{R_0/\lambda}.$$

Указанное здесь соотношение для σ_T представляет собой принципиальный результат для теории теплового разрушения полимерных волокон: σ_T есть механический аналог теплового нагружения и связывает между собой теплофизические, упругие и структурные характеристики полимеров, что позволяет проследить влияние каждого фактора на тепловую реакцию полимерного материала с начальной (исходной) краевой микротрещиной. В качестве температуры T_ϵ , входящей в (1)–(2), примем среднюю интегральную температуру в кольце $R \leq r < R + \lambda$ при флуктуационном увеличении радиуса круговой трещины на λ . Это дает следующую оценку: $T_\epsilon = \frac{2q_T \lambda \beta(R_0)}{\lambda_T}$.

Здесь также, прослеживается связь макро- и микропараметров и их влияние на тепловое состояние полимерного материала в окрестности круговой трещины.

Таким образом, все величины, входящие в (1) вычислены, что дает возможность описать термокинетику роста круговой трещины в полимерных волокнах и вычислить соответствующую долговечность, как при механическом нагружении, так и в условиях теплового разрушения.

Для завершения решения термоупругой задачи (3)–(10) необходимо вернуться к граничному условию $\sigma_{rz}(r,z)|_{z=0} = 0$, $r \geq 0$ в (6). На полученное решение следует наложить еще такое решение уравнений (12) при $T=0$, чтобы данное граничное условие удовлетворялось. Для этого используем функцию перемещений Лява $L(r,z)$. При этом все полученные соотношения сохраняют силу. Все полученные соотношения предполагается использовать далее при построении теории полной кривой изотермы долговечности полимерных волокон, последнее составит содержание следующей публикации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов Э.М., Цой Б., Шевелев В.В. Структурно-статистическая кинетика разрушения полимеров. М.: Химия, 2002. 740с.
2. Карташов Э.М. Современные представления кинетической термофлуктуационной теории прочности полимеров (обзор). //Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология ВМС. ВИНТИ. 1991. Т.27. С.3-112.