

Э.М. Карташов
МИТХТ им. М.В. Ломоносова

НОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАКСВЕЛЛА И КЕЛЬВИНА-ФОГТА

УДК 541.64:539.3

Предложены новые функциональные соотношения для механических моделей полимерных тел на примерах реологических моделей Максвелла и Кельвина-Фогта

Введение. Необходимость в построении механических моделей полимерных тел возникла вследствие неприменимости обычных уравнений упругости и вязкости к полимерам. Полимеры в одних случаях ведут себя как упругие тела, а в других как вязкие жидкости, поэтому их механическое поведение не подчиняется ни закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, ни закону вязкого течения

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}, \quad t > 0 \quad (1)$$

с заданными начальными условиями для напряжения $\sigma(t)$, либо для деформации $\varepsilon(t)$.

Здесь a_k, b_k ($k = \overline{1, m}$) – постоянные коэффициенты, которые определяют механические свойства изучаемого материала. Модельные представления на основе уравнения (1) неизменно излагаются в литературе по механике и физике полимеров [1-3].

И как это ни странно, но в столь, казалось бы, завершенной области реологии еще остались «математические резервы» для переосмысливания аналитических решений уравнения [1]. Математической формой этих решений относительно напряжения при заданной деформации или деформации при заданном напряжении традиционно является система кусочно-гладких функций, каждая из которых описывает процесс в своем интервале времени. Однако, как оказалось, можно иначе описать эти решения, используя единое функциональное соотношение для всех $t > 0$. Публикуемая статья представляет собой более методический интерес, особенно для

Ньютона $\sigma = \eta d\varepsilon/dt$. Здесь σ – напряжение, ε – деформация, E – модуль упругости, η – коэффициент вязкости. Для описания механического поведения полимерных тел были разработаны соответствующие модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения [1-3].

При этом под механической моделью материала подразумевается не только набор пружин (упругость) и демпферов (вязкость), но и соответствующие моделям дифференциальные уравнения вида:

кафедр полимерного профиля. В то же время предложенные соотношения могут быть использованы в реологии как обобщающая форма записи, содержащая известные частные случаи.

Используем для расчетов обобщенные функции [4]:

единичную функцию Хэвисайда

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

и дельта-функцию Дирака $\delta(x) = H'(x)$.

При этом

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a, b), \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (3)$$

Используем также предложенное автором в [4] решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) + a^2 y(t) = \varphi(t), & t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

в виде компактного соотношения

$$y(t) = y_0 e^{-a^2 t} + \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2(t-\tau)} d\tau \quad (5)$$

Модель Максвелла является наиболее простой моделью, описывающей поведение вязкого тела, осложненного упругостью. В модели Максвелла упругие и вязкие элементы соединены последовательно, напряжение $\sigma(t)$, приложенное к модели, вызывает деформацию в каждом элементе: упругую деформацию пружины $\varepsilon_1(t) = \sigma(t)/E$ и деформацию вязкого элемента $\varepsilon_2(t) = \left(1/\eta\right) \int_0^t \sigma(\tau) d\tau$.

Общая деформация складывается из деформации элементов $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, то есть

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \left(1/\eta\right) \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

откуда после дифференцирования приходим к уравнению вида (1) для модели Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma, t > 0. \quad (6)$$

Рассмотрим частные случаи для уравнения (6).

Постоянное напряжение. Пусть в начальный момент времени (при $t = 0$) приложено постоянное напряжение σ_0 , действующее до момента времени t_0 , после чего снимается (рис. 1).

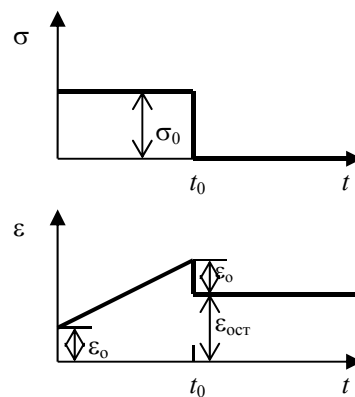


Рис. 1

Имеем:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t_0 - t), t > 0. \quad (7)$$

Так как $\frac{d\sigma}{dt} = -\sigma_0 \delta(t_0 - t)$, где $\sigma_0 =$

$E\varepsilon_0$, ε_0 – величина мгновенной деформации упругого элемента, то (6)-(7) дают следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon_0 \delta(t_0 - t) + \left(\frac{\sigma_0}{\eta}\right) H(t_0 - t), t > 0 \\ \varepsilon(t)|_{t=0} = \varepsilon_0 \end{cases} \quad (8)$$

решение которой согласно (5) имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \int_0^t \delta(t_0 - \tau) d\tau + \left(\frac{\sigma_0}{\eta}\right) \int_0^t H(t_0 - \tau) d\tau \quad (9)$$

При вычислении интегралов в (9) следует проявить особую внимательность: необходимо перевести t_0 в нижний или верхний пределы в зависимости от значений времени t относительно t_0 и далее воспользоваться соотношениями (2)-(3). Если ввести также время релаксации $\tau = \eta/E$ и учесть, что $\frac{\sigma_0}{\eta} = \left(\frac{\sigma_0}{E}\right) \cdot \left(\frac{E}{\eta}\right) = \frac{\varepsilon_0}{\tau}$, то из (9) окончательно находим:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left\{ H(t_0 - t) + \left(1/\tau\right) [t - (t - t_0) H(t - t_0)] \right\}, t > 0 \quad (10)$$

Это и есть общая формула, описывающая деформацию в модели Максвелла в полном интервале времени $t > 0$ (рис. 1). Для интервала времени $0 \leq t < t_0$ имеем из (10): $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 (1 + t/\tau)$; остаточная деформация после снятия напряжения ($t > t_0$) есть: $\varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_0 t_0/\tau$; деформация в момент времени t_0 ($t \rightarrow t_0 + 0$, так что $H(t - t_0) \rightarrow 1$) равна $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 (1 + t_0/\tau)$.

Постоянная деформация. Пусть в начальный момент времени (при $t = 0$) модели дана мгновенная постоянная деформация ε_0 , действующая до момента времени t_0 , после чего мгновенно снимается (рис.2). Имеем:

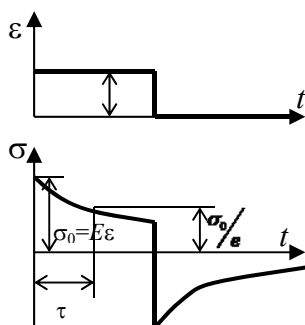


Рис. 2

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t_0 - t), t > 0. \quad (11)$$

Уравнение (6) относительно изменения напряжения $\sigma(t)$ дает следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dt} + \left(\frac{E}{\eta}\right)\sigma = -(E\varepsilon_0)\delta(t_0 - t), & t > 0 \\ \sigma(t)|_{t=0} = \sigma_0 \end{cases} \quad (12)$$

решение которой согласно (5) имеет вид:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-(E/\eta)t} - \sigma_0 \int_0^t e^{-(E/\eta)(t-\tau)} \delta(\tau - t_0) d\tau \quad (13)$$

После вычисления интеграла (по схеме, изложенной выше) находим соотношение, содержащее полную информацию об изменении напряжения при всех $t > 0$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 [1 - H(t - t_0)] e^{-(t/\tau)}, t > 0 \quad (14)$$

Для времени $t < t_0$ имеем из (14): $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-(t/\tau)}$, при $t > t_0$ напряжение $\sigma(t) = \sigma_0 (1 - e^{t_0/\tau}) e^{-(t/\tau)}$, в момент времени t_0 ($t \rightarrow t_0 + 0$) напряжение равно величине $\sigma(t_0) = -\sigma_0 (1 - e^{-t_0/\tau})$.

Выражение (14) позволяет проследить изменение упругой деформации, создаваемой пружиной, и деформацию вязкого элемента (вязкого течения), создаваемую демпфером, что далеко не очевидно из данных рис. 2. В начальный момент при $t = 0$ пружина деформируется на величину ε_0 , а деформация демпфера равна нулю. Затем начинается деформация демпфера, которая стремится в пределе к ε_0 . Так как $\varepsilon_{\text{упр.}} = \sigma(t)/E$ и убывает с течением времени, а $d\varepsilon_{\text{вязк.}}/dt = \sigma(t)/\eta$ и их сумма равна ε_0 в интервале времени t_0 , то отсюда и из (14) имеем для каждой деформации: $\varepsilon_{\text{вязк.}} = \varepsilon_0 e^{-t/\tau}$;

$\varepsilon_{\text{вязк.}} = \varepsilon_0 (1 - e^{-t/\tau})$. Выражения (10) и (14) содержат в себе также и классические случаи ползучести и релаксации напряжения ($t_0 \rightarrow \infty$, при этом $H(t - t_0) \rightarrow 0$ и $(t - t_0)H(t - t_0) \rightarrow 0$). Так, для случая ползучести при $\sigma = \sigma_0$ для $t > 0$ имеем из (10) $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + (\sigma_0/\eta)t$, что является одной из форм выражения закона Ньютона: в полимерном материале под действием постоянного напряжения происходит вязкое течение во все время действия силы. Для случая релаксации напряжения при $\varepsilon = \varepsilon_0$ для $t > 0$ выражение (14) дает: $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$. При $t = \tau$ имеем: $\sigma = \sigma_0/e$, то есть τ - время, за которое начальное напряжение уменьшается в e раз. При очень больших временах, когда $t \gg \tau$, величина $\sigma \rightarrow 0$, что и подтверждается на опыте.

Модель Кельвина-Фогта в отличие от модели Максвелла учитывает упругость, отличную от гуковской, которая возникает в полимерах за счет разворачивания макромолекул. В этой модели упругий и вязкий элементы соединены параллельно. Деформация такой модели является общей для обоих элементов, а напряжение складывается из напряжений в каждом элементе: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Дифференциальное уравнение для этой модели имеет вид:

$$\eta \frac{d\varepsilon}{dt} + E\varepsilon = \sigma, t > 0. \quad (15)$$

Здесь, как и выше, могут быть рассмотрены частные случаи напряжения.

Постоянное напряжение – режим (7). Так как начальное напряжение σ_0 не может вызывать мгновенную деформацию (демпфер не дает пружине мгновенно деформироваться), то задача Коши для уравнения (15) имеет вид, представленный на рис. 3.

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} + (E/\eta)\varepsilon = (\sigma_0/\eta)H(t_0 - t), & t > 0 \\ \varepsilon(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Опуская выкладки, приведем конечный результат:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty e^{-t/\tau} \left[\left(e^{t_0/\tau} - 1 \right) - H(t_0 - t) \left(e^{t_0/\tau} - e^{t/\tau} \right) \right] \quad (17)$$

где $\varepsilon_{\infty} = \sigma_0 / E$, если учесть, что деформация возрастает по времени, асимптотически стремясь к гуксовой. Рассмотрим интервалы времени $t < t_0$ и $t \geq t_0$. В первом из них $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\infty}(1 - e^{-t/\tau})$, во втором $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\infty}(1 - e^{-t_0/\tau})e^{-(t-t_0)/\tau}$. Так как мгновенные возникновение и сокращение деформации отсутствуют, то при снятии напряжения в момент времени t_0 деформация должна быть непрерывной, что и подтверждают приведенные соотношения (рис. 3).

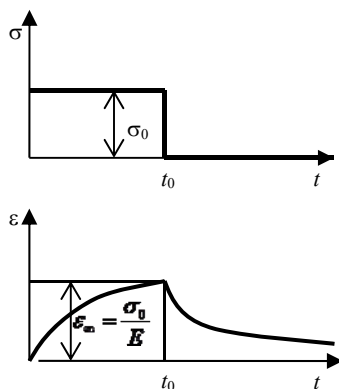


Рис. 3

Постоянная скорость деформации. Модель Кельвина-Фогта не допускает мгновенной деформации, однако допускает деформацию с постоянной скоростью v_0 .

Рассмотрим режим нагружения, представленный на рис. 4.

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = v_0 H(t_0 - t), & t > 0 \\ \varepsilon(t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

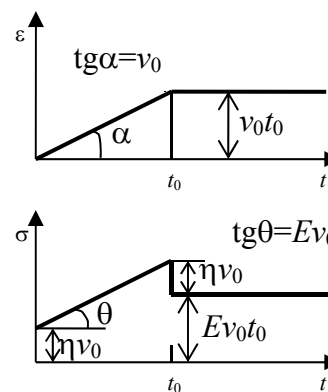


Рис. 4

Уравнения (15) и (18) приводят к соотношениям:

$$\varepsilon(t) = v_0 [t_0 - (t_0 - t)H(t_0 - t)], \quad t > 0, \quad (19)$$

$$\sigma(t) = \eta v_0 H(t_0 - t) + E v_0 [t_0 - (t_0 - t)H(t_0 - t)], \quad t > 0. \quad (20)$$

и в такой же форме позволят описать напряжение для времен $t < t_0$ $\sigma(t) = \eta v_0 + E v_0 t$ и для времен $t > t_0$ $\sigma = E v_0 t_0$.

Использование обобщенных функций позволяет рассмотреть и более сложные трехэлементные модели, например с двумя пружинами и одним демпфером и наоборот. Принципиальная сторона подхода при этом не меняется, математические выкладки практически не усложняются.

Автор благодарит профессоров Кулезнева В.Н и Симонова-Емельянова И.Д. за любезно предоставленные книги по реологии, способствующие появлению этой публикации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гуль В.Е., Кулезнев В.Н. Структура и механические свойства полимеров. М. Высшая школа, 1979.
2. Аскадский А.А. Лекции по физико-химии полимеров. М. МГУ. 2001.
3. Кулезнев В.Н., Шершнев В.А. Химия и физика полимеров. М. Высшая школа. 1988.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М. Высшая школа. 1988.