

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ СИСТЕМЫ СУСТАВ – СИНОВИАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В РАМКАХ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА

Э.М. Карташов, В.А. Ломовской, *В.В. Зар, *В.П. Волошин, **А.Е. Чалых

*МОНИКИ

**ИФХ РАН

Исследован механизм взаимодействия поверхностных слоев сустава человека и синовиальной жидкости при периодических воздействиях. Описано качественно распределение напряжений в толще хряща и их влияние на физико-механические характеристики указанной системы.

Синовиальная жидкость (СЖ) в норме и патологии крупных суставов человека и животных выполняет кроме связывающей и демпфирующую функцию регулирования механических свойств поверхностных слоев сустава для наиболее оптимального распределения напряжений в толще хряща. Указанная биологическая система, как известно [1], работает в условиях больших нагрузок, деформаций и скоростях изменений деформаций.

Цель настоящего исследования – разработать (в первом приближении) простейшую математическую модель термомеханического механизма взаимоотношений в системе сустав – синовиальная среда при периодических деформациях по гармоническому закону:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

где ε_0 – амплитуда деформации, ω – частота.

Случай (1) представляет особый интерес для исследования, так как воссоздает реальные условия эксплуатации СЖ в суставе человека.

За каждый цикл $T_{\text{ц}} = 2\pi/\omega$ деформации в СЖ происходит рассеяние запасенной упругой энергии, которая равна затраченной работе. Эта рассеянная, то есть превратившаяся в тепло, энергия

W_T в единице объема СЖ за цикл, равна:

$$W_T = \int_0^{T_{\text{ц}}} \sigma(t) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} dt \quad (2)$$

где $\sigma(t)$ – механическое напряжение в СЖ, соответствующее деформации (1). Принимается, что деформация $\varepsilon(t)$ и напряжение $\sigma(t)$ связаны дифференциальным соотношением

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta} \sigma = E \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\sigma(t)|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

соответствующим линейной реологической модели Максвелла. Здесь E , η – характеристики СЖ, соответственно, модуль упругости ($[E] = \text{Н/м}^2$) и вязкость ($[\eta] = \text{Н} \cdot \text{с/м}^2$). Считается, что физико-механические параметры суставной жидкости в процессе деформации (1) остаются постоянными (или меняются незначительно), если учесть, что согласно [1, 2] эти параметры обладают высокой температурной стабильностью даже при их значительной барической зависимости, чем объясняются уникальные физиологические свойства суставной жидкости.

Соотношения (1), (3), (4) приводят к следующему выражению для напряжения:

$$\sigma(t) = \frac{E\varepsilon_0\eta\omega}{E^2 + \eta^2\omega^2} (E\cos\omega t + \eta\omega\sin\omega t) - \frac{E^2\varepsilon_0\eta\omega}{E^2 + \eta^2\omega^2} \exp\left[-\left(\frac{E}{\eta}t\right)\right] \quad (5)$$

Для достаточно большого времени t второе слагаемое справа в (5) становится пренебрежимо малым, и напряжение будет определяться только первым слагаемым в (5), которое не зависит от начального условия (4). Если влиянием начального условия можно пренебречь, то система находится в установившемся режиме деформаций. Если влияние начального условия существенно, имеем переходный режим. Установить точную границу установившегося и переходного режимов нельзя [3]. Это зависит от необходимой точности результатов. На практике это обычно не вызывает затруднений, так как установившийся режим наступает достаточно быстро. Для установившегося режима соотношению (5) можно придать более удобную форму:

$$\sigma(t) = \frac{E\varepsilon_0\eta\omega}{\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta) \quad (6)$$

где $\operatorname{tg} \delta = E/\eta\omega$ (7)

Соотношения (2), (6) – (7) позволяют рассчитать теплоснабжение в объеме СЖ. Имеем:

$$W_T = \frac{\pi\varepsilon_0^2 E^2 \eta\omega}{E^2 + \eta^2\omega^2} \left([W_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right) \quad (8)$$

Выделенное тепло (8) поступает в хрящ сустава через его поверхность, граничащую с суставной жидкостью. Рассчитаем количество тепла q_T , поступающего через единицу площади поверхности за единицу времени. Пусть $S_{\text{СП}}$ – площади суставной поверхности, $V_{\text{СЖ}}$ – объем суставной жидкости. Тогда величина q_T есть:

$$q_T = \frac{W_T V_{\text{СЖ}}}{(2\pi/\omega) S_{\text{СП}}}, \quad t > 0 \quad \left([q_T] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right). \quad (9)$$

Здесь не учитывается микрогеометрия излома поверхности, шероховатость, связанная со структурой, морфологией, нагружением и т. д.

Термомеханический процесс (1), (2), (8), (9) приводит к появлению в крупном суставе температурного поля $T(z, t)$, где z – текущая толщина сустава. Считаем, что суставное тело ограничено плоской поверхностью, за которую можно принять

плоскость $z=0$, и ось z направлена перпендикулярно этой плоскости внутрь тела (при этом $z>0$, и влияние правой границы области на процесс теплопроводности в суставе не учитывается, так как наибольший интерес для изучения представляет поведение его слоев, не слишком далеких от поверхности). Температурная функция $T(z, t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad t > 0; \quad (10)$$

$$T(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad z \geq 0; \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{1}{\lambda_T} q_T, \quad t > 0; \quad (12)$$

$$|T(z, t)| < +\infty, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

где T_0 – начальная температура (температура человеческого тела), a , λ_T – соответственно, температуропроводность и теплопроводность сустава.

Так как в настоящей публикации первоначально ставится цель описать качественно картину термомеханической реакции крупного сустава на периодическое деформирование указанной выше системы, то для проведения далее численных экспериментов удобнее записать решение (10)–(13) в безразмерных (обобщенных) переменных

$$\xi = \frac{cz}{a}, \quad \tau = \frac{c^2 t}{a}, \quad (14)$$

$$T^*(\xi, \tau) = \frac{T(\xi, t) - T_0}{(q_T/\lambda_T)(a/c)}$$

где c – скорость распространения продольных волн (величина, близкая к скорости звука в материале сустава).

В переменных (14) решение задачи (10)–(13) находится методом, развитым в [4] и имеет вид:

$$T^*(\xi, \tau) = (2/\sqrt{\pi}) \sqrt{\tau} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \times$$

$$\xi \left[1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \right], \quad (15)$$

$$\xi = \frac{cz}{a},$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy$ – функция

Лапласа.

Нестационарное температурное поле (15) вызывает в суставе напряженное состояние, которое изменяется с течением времени. Таким образом, в сущности, следует далее рассмотреть не задачу статики, а задачу динамики относительно компонент тензора температурных напряжений в условиях плоского деформированного состояния. Температурные условия (10)–(13) предполагают случай одномерного движения, основной величиной в котором для исследования является напряжение $\sigma_{zz}(z, t)$. Указанная функция является решением следующей задачи динамической термоупругости [5]:

$$c^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, z > 0, t > 0; \quad (16)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (17)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) \Big|_{z=0} = \sigma_{zz}(z, t) \Big|_{z=\infty} = 0, t \geq 0, \quad (18)$$

$$S = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)}; \quad (19)$$

$$c^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (20)$$

Здесь: α_T – коэффициент линейного теплового расширения ($[\alpha_T] = \text{град}^{-1}$), λ, μ – изотермические коэффициенты Ламе, ρ – плотность материала, ν – коэффициент Пуассона. Здесь, как и выше, удобнее перейти к безразмерным переменным (ξ, τ) , полагая

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big| = \sigma_{zz}(z, t) / K, \quad (21)$$

$$K = S(q_T / \lambda_T)(\alpha / c)$$

В новых переменных задача (16)–(18) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0; \quad (22)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (23)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\infty} = 0, \tau \geq 0, \quad (24)$$

где $T^*(\xi, \tau)$ – функция (15).

Решение задачи, как и в случае (15), находится методом, изложенным в [4], и записывается в виде:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = F_1(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < \xi \quad (t < \frac{z}{c}), \\ F_2(\xi, \tau), & \tau > \xi \quad (t > \frac{z}{c}), \end{cases} \quad (25)$$

где:

$$F_1(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \exp(\tau) \left[\exp(-\xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \exp(\xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right]; \quad (26)$$

$$F_2(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \quad (27)$$

Остальные компоненты тензора напряжений имеют следующий вид: все касательные напряжения оказываются равными нулю, а для нормальных напряжений $\sigma_{xx}(z, t)$ и $\sigma_{yy}(z, t)$ из соотношений термомеханики [5] вытекают следующие значения

$$\sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E \alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1-\nu}. \quad (28)$$

Проанализируем термическую реакцию рассматриваемой области (суставного тела) на основе полученных соотношений. Прежде всего, из (28) следует, что на поверхности области $z=0$ по всем направлениям действуют равные между собой сжимающие напряжения

$$\sigma = -\frac{E \alpha_T [T(0, t) - T_0]}{(1-\nu)} \quad (29)$$

характер которых соблюдается и во внутренних слоях (по текущей толщине от поверхности). Как следует из соотношения (25), составляющая напряжения, выражаемая функцией F_2 , представляет собой продольную упругую волну, фронт которой движется со скоростью c от поверхности внутрь тела. Рассмотрим произвольную точку (сечение) внутри области. Вначале в ней возникает только составляющая напряжения, соответствующая функции

F_1 . В момент времени $t = z/c$ упругая волна расширения, описываемая функцией F_2 и движущаяся от поверхности $z = 0$ внутрь тела, достигает сечения $z > 0$. В этот момент значение безразмерного времени τ равняется значению без-

размерной координаты ξ . На рис. 1 приводится изменение напряжения σ_{zz}/K в фиксированном сечении $\xi = const$ в зависимости от безразмерного времени τ , рассчитанного по формулам (25) – (27).

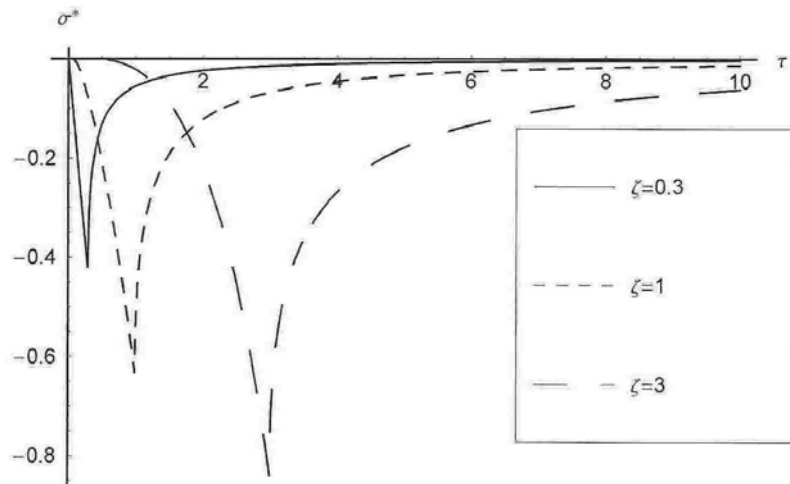


Рис. 1.

Рассмотрим для определенности сечение $\xi = 1$. В этом сечении при $\tau < 1$ возникает сжимающее напряжение σ_{zz} , которое возрастает от нуля при $\tau = 0$ до максимального значения ($-0.66 K$) при $\tau = 1$. В момент времени $\tau = 1$ ($t = z/c$) в сечение $\xi = 1$ приходит волна расширения, и напряжение σ_{zz} , оставаясь сжимающим, начинает убывать от наибольшего значения ($-0.66 K$) до нуля, приближаясь к квазистатическому значению. По мере

продвижения в более глубокие слои тела, максимальное значение напряжения в сечении возрастает, однако, его воздействие как сжимающего сохраняется. В то же время для слоев, близких к поверхности тела, наблюдается уменьшение воздействия сжимающих напряжений. На рис. 2 приведено изменение напряжения σ_{zz}/K и температуры $(T - T_0)(S/K)$ в фиксированный момент времени вдоль текущей толщины.

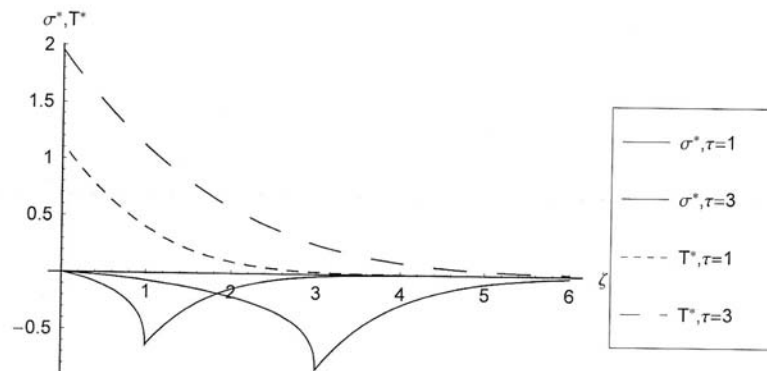


Рис. 2.

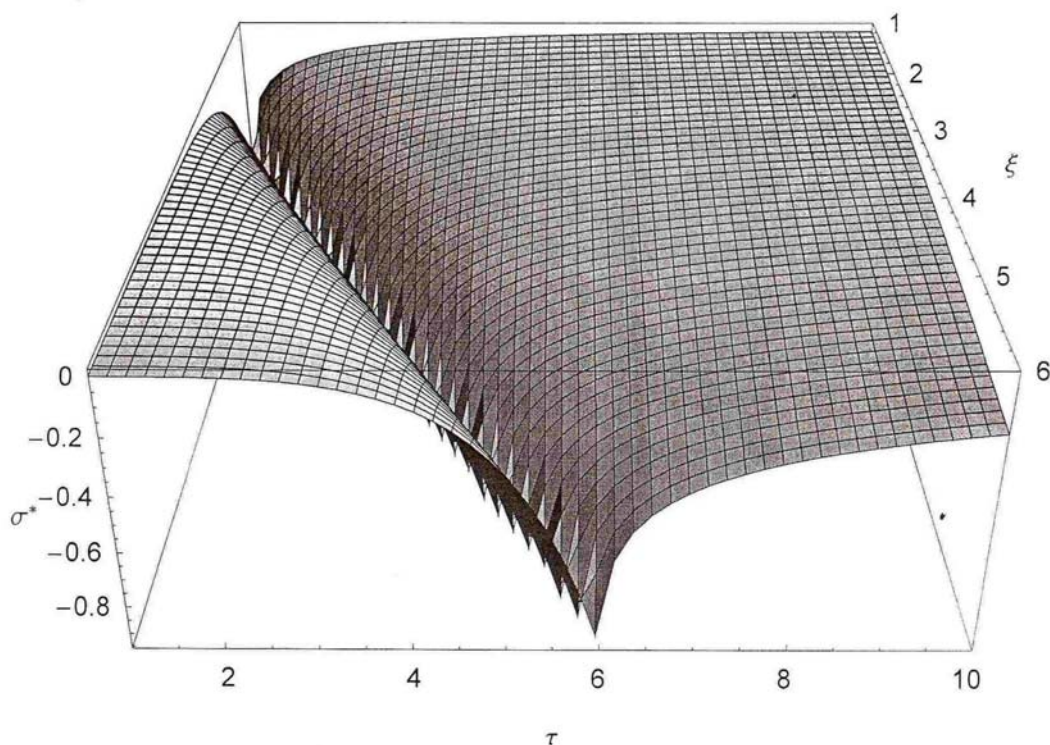


Рис. 3.

Здесь, как и на рис. 1, сохраняются отмеченные закономерности напряжения сжатия, причем со временем напряжение изменяется незначительно. На рис. 3 приведена пространственная картина изменения напряжения сжатия σ_{zz}/K одновременно со временем и по текущей толщине. Из (28) и данных рис. 1 – 3 следует также весьма важный вывод, характеризующий поведение суставного тела при периодических деформациях: по всем направлениям на поверхности и внутри действуют сжимающие напряжения. Можно предположить, что при

равномерных нагрузках механические воздействия в качестве разрушающих не являются основными по сравнению с биохимическими процессами, вызывающими патологию суставной жидкости и суставного тела. По-видимому, наиболее разрушительными являются кратковременные импульсные ударные механические воздействия, приводящие к концентрации напряжений в отдельных местах структуры, значительно превосходящих средние по объему [5].

Изучение этих случаев предполагается в следующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лопатин, В. В. Полиакриламидные гидрогели в медицине / В. В. Лопатин, А. А. Аскадский. – М. : Научный мир, 2004. – 262 с.
2. Сравнительное исследование поведения суставной жидкости человека и полиакриламидных гидрогелей в зависимости от давления / В. В. Лопатин [и др.] // Пластические массы. – 2004. – №7. – С. 43–46.
3. Гольберг, И. И. Механическое поведение полимерных материалов / И. И. Гольберг. – М. : Химия, 1970. – 192 с.
4. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.
5. Карташов, Э. М. Структурно–статистическая кинетика разрушения полимеров / Э. М. Карташов, Б. Цой, В. В. Шевелев. – М. : Химия, 2002. – 740 с.