



Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности

Э.М. Карташов

МИРЭА – Российский технологический университет (Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия

@ Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

Рассмотрена серия операционных (по Лапласу) нестандартных изображений, оригиналы которых отсутствуют в известных справочниках по операционному исчислению. Путем сведения одного из базовых изображений к контурному интегралу Римана-Меллина для модифицированных функций Бесселя и анализа соответствующей формулы обращения с использованием подходов теории функций комплексного переменного установлен аналитический вид искомого оригинала, имеющего скачкообразный характер с точкой разрыва. Показано, что аналитические решения соответствующих математических моделей с использованием найденных оригиналов имеют волновой характер, что выражается наличием в решениях ступенчатой функции Хевисайда. Последнее означает, что в любой момент времени существует область физического возмущения до точки разрыва и невозмущенная область после точки разрыва. Изученные изображения входят в операционные решения математических моделей во многих областях прикладной математики, физики, термомеханики, теплофизики, в частности в теории теплового удара вязкоупругих тел, при изучении тепловой реакции твердых тел на основе классической феноменологии Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта с учетом конечной скорости распространения теплоты. Указанные модели необходимы для изучения термической реакции сравнительно новых консолидированных структурно-чувствительных полимерных материалов в конструкциях, подверженных высокоинтенсивным внешним воздействиям. Полученные для оригиналов аналитические соотношения и вытекающие из них оригинальные несобственные интегралы, содержащие комбинации функций Бесселя, могут быть использованы в общей методологии построения и применения разнообразных математических моделей в широком диапазоне внешних воздействий на материалы во многих областях науки и техники.

Ключевые слова: *оригиналы операционных изображений, гиперболические модели нестационарной теплопроводности, тепловой удар.*

Originals of operating images for generalized problems of unsteady heat conductivity

Eduard M. Kartashov

MIREA – Russian Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow 119571, Russia

@ Corresponding author, e-mail: kartashov@mitht.ru

A series of operating (Laplace) non-standard images, the originals of which are absent in well-known reference books on operational calculus, are considered. By reducing one of the basic images to the Riemann-Mellin contour integral for the modified Bessel functions and analyzing the corresponding inversion formula using the approaches of the complex variable function theory, an analytical form of the original original is found, which is abrupt in nature with a break point. It is shown that analytical solutions of the corresponding mathematical models using the found originals have a wave character, which is expressed by the presence of the Heaviside step function in the solutions. The latter means that at any time there is a region of physical disturbance to the point of discontinuity and an unperturbed area after the point of discontinuity. The images studied are included in the operational solutions of mathematical models in many areas of applied mathematics, physics, thermomechanics, thermal physics, in particular in the theory of thermal shock of viscoelastic bodies, in the study of the thermal reaction of solids based on the classical Maxwell-Cattaneo-Lykov-Vernott phenomenology, taking into account the final rate of heat propagation. These models are needed to study the thermal reaction of relatively new consolidated structurally sensitive polymeric materials in structures exposed to high-intensity external influences. The analytical relations obtained for the originals and the original improper integrals resulting from them, containing combinations of Bessel functions, can be used in the general methodology of constructing and applying various mathematical models in a wide range of external influences on materials in many fields of science and technology.

Keywords: originals of operational images, hyperbolic models of unsteady heat conduction, thermal shock.

Введение

Современные конструкционные материалы, представляющие собой совокупность микро- или наноструктурных элементов, часто называют структурно-чувствительными материалами. Создание таких материалов на основе нанотехнологий – важное направление развития современного материаловедения. Такие материалы обладают уникальными физико-механическими свойствами, позволяющими эффективно их использовать в конструкциях, подверженных высокоинтенсивным внешним воздействиям [1, 2]. Важным этапом в создании и использовании такого рода материалов является построение соответствующих математических моделей, позволяющих описать их поведение в широком диапазоне изменения внешних нагрузений. Общая методология построения и исследования таких моделей еще далека от завершения и требует дальнейшего развития. Это относится в первую очередь к математическим моделям ряда физических процессов с учетом пространственно-временной нелокальности.

Классические феноменологические модели процессов переноса и других явлений, таких как теплоты Фурье, массы Нернста, электричества Ома, напряжений Ньютона и Гука, базируются на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды. Полученные на их основе дифференциальные уравнения для соответствующих физических величин являются локальными, то есть в них не учитывается локальная неравновесность процессов; в процессе вывода в них заложена бесконечная скорость распространения возмущений. При этом функции, описывающие эти процессы, являются

гладкими функциями координат и времени. Однако скорости распространения потенциалов любых физических полей не могут принимать бесконечных значений. В реальном теле процесс их изменения происходит с некоторым запаздыванием во времени согласно релаксационным свойствам материала, учитываемыми коэффициентами релаксации. Такие процессы реально существуют. Они имеют так называемые фронтовые поверхности, при переходе через которые температурная функция и ее производные имеют разрыв [3, 4]. Такие функции описываются гиперболическими дифференциальными операторами. К их числу относятся высокоинтенсивные нестационарные процессы, время протекания которых сопоставимо с временем релаксации. Например, при нагреве материалов короткими лазерными импульсами (длительностью от нано- до фемтосекунд); в процессах нагревания при трении с высокой скоростью; при тепловом ударе; локальном нагреве при динамическом распространении трещины в околзвучковом режиме и др.

Учет локальной неравновесности, заложенный в соотношении Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта для теплового потока (в одномерном случае)

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

вместе с уравнением энергии $c\rho \partial T / \partial t = -\partial q / \partial x$ приводят к уравнению теплопроводности гиперболического типа [5]

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

и соответствующим краевым задачам обобщенного типа [6]. Здесь τ_r – время тепловой релаксации (мера инерции теплового потока), связанная со скоростью распространения теплоты ν_T соотношением $\tau_r = a / \nu_T^2$ (a – температуропроводность). При $\nu_T \rightarrow \infty$ величина $\tau_r \rightarrow 0$ и соотношения (1)-(2) дают, соответственно, классический феноменологический закон переноса теплоты Фурье и уравнение теплопроводности параболического типа, лежащее в основе практически необозримого числа исследований по нестационарному теплопереносу. Обобщенные задачи переноса для уравнения (2) значительно отличаются от классических, являясь более сложными при нахождении их аналитических решений. Специфика такого рода задач заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудностях их решения в аналитически замкнутом виде. Отсюда – весьма незначительные успехи в нахождении их точных аналитических решений. Основной метод решения краевых задач обобщенного типа для частично ограниченных областей – операционный, приводящий в аналитических решениях в пространстве изображений по Лапласу $\bar{T}(x, p) = \int_0^\infty \exp(-pt)T(x, t)dt$ к сложным функци-

ональным конструкциям типа Карслоу-Егера [7], оригиналы которых не содержатся в известных справочниках по операционному исчислению. На этом пути возникают серьезные трудности вычислительного характера. Цель данной публикации – рассмотреть серию нестандартных изображений и их оригиналов. Помимо обобщенных задач нестационарного переноса (теплоты и массы) такого рода изображения возникают также при описании электрических линий передач; при изучении переходных режимов электрических цепей (распространение электрических возмущений вдоль линии передач); в теории теплового удара вязкоупругих тел и др. Остановимся на обобщенной задаче для уравнения (2) в области $x > 0, t > 0$ при начальном условии

$$T(x, t)|_{t=0} = T_0, x \geq 0 \quad (3)$$

и граничных условиях либо первого рода (температурный нагрев или охлаждение)

$$T(x, t)|_{x=0} = T_c, t > 0, \quad (4)$$

либо второго рода (тепловой нагрев или охлаждение)

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda} q_0, t > 0, \quad (5)$$

либо третьего рода (нагрев или охлаждение средой)

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h \left[T(x, t) \Big|_{x=0} - T_c \right], t > 0, \quad (6)$$

а также условию ограниченности (во всех трех случаях)

$$|T(x, t)| < \infty, x \geq 0, t \geq 0. \quad (7)$$

Следует заметить, что вопросы корректной формулировки граничных условий для уравнения гиперболического типа (2) рассмотрены автором в [7].

Остановимся далее на теории: оригиналы для нестандартных изображений.

Теоремы обращения для изображений

Рассмотрим серию изображений вида

$$\bar{f}(p) \exp\left[-x\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}\right],$$

или

$$\begin{cases} \bar{f}(p) \exp\left[-x\bar{\mu}(p)\right] \\ \bar{\mu}(p) = \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}, \end{cases} \quad (8)$$

где $\bar{f}(p)$ – различные комбинации рациональных и иррациональных функций аргумента p .

Вначале изучим интеграл Римана-Меллина вида

$$Y_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{\mu(p)} \exp\left[pt - x\bar{\mu}(p)\right] dp \quad (9)$$

Воспользуемся представлением функции Бесселя мнимого аргумента $I_n(z)$ в виде интеграла [8]

$$\left(\frac{2}{z}\right)^n I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{u^{n+1}} \exp\left(u + \frac{z^2}{4u}\right) du \quad (10)$$

и приведем (9) к виду, сходному с выражением (10). Для этого положим [7]:

$$\begin{aligned} (p+2\alpha)^{1/2} + (p+2\beta)^{1/2} &= \xi^{1/2} \\ (p+2\alpha)^{1/2} - (p+2\beta)^{1/2} &= 2\sigma\xi^{-1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда

$$p = \frac{1}{4} \left(\xi + \frac{4\sigma^2}{\xi} - 4\rho \right), \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\xi - \frac{4\sigma^2}{\xi} \right), \quad (12)$$

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{dp}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}}. \quad (13)$$

Здесь $\rho = \alpha + \beta$, $\sigma = \alpha - \beta$. Теперь преобразуем интеграл (9) с помощью замены переменной (13). При этом прямая $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ в плоскости p преобразуется в некоторую линию в плоскости ξ . Эта линия не будет прямой, но по теореме Коши она может быть деформирована в линию, которую обозначим $(\gamma' - i\infty, \gamma' + i\infty)$. Теперь интеграл (9) принимает вид

$$Y_1(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' - i\infty}^{\gamma' + i\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp \left[-\rho t + \frac{1}{4} \xi(t-x) + \frac{\sigma^2}{\xi}(t+x) \right] \quad (14)$$

Если $t > x$, то полагая в (14) $(\xi/4)(t-x) = u$, из (10) при $n = 0$ находим:

$$Y_1(x, t) = \exp(-\rho t) I_0(\sigma\sqrt{t^2 - x^2}), t > x. \quad (15)$$

Теперь окончательно можно записать:

$$\frac{1}{\mu(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow \frac{*}{*} \exp(-\rho t) I_0(\sigma\sqrt{t^2 - x^2}) \eta(t-x), \quad (17)$$

где $\eta(t)$ – функция Хевисайда. Далее, применяя теорему о свертке, находим:

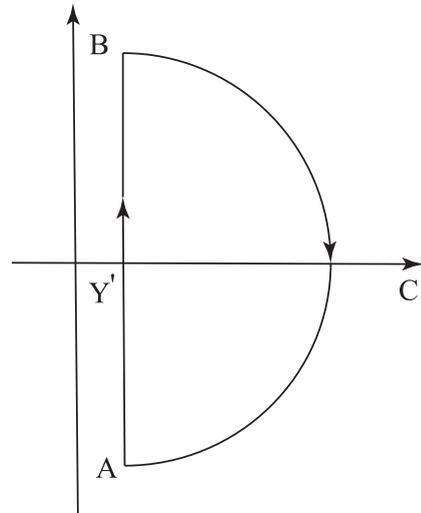
$$\frac{1}{\mu(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \bar{f}(p) \leftarrow \frac{*}{*} \int_0^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2 - x^2}) \eta(\tau-x) d\tau =$$

$$= \begin{cases} \int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau, & t > x, \\ 0, & t < x, \end{cases} =$$

$$= \left[\int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau \right] \eta(t-x). \quad (18)$$

Если $t < x$, рассмотрим интеграл (14), взятый по замкнутому контуру, изображенному на рисунке, который состоит из части контура $(\gamma' - i\infty, \gamma' + i\infty)$ и дуги окружности радиуса R с центром в начале координат. Подынтегральная функция в (14) регулярна внутри контура и на границе и не содержит внутри контура ни одного полюса. Тогда по теореме Коши интеграл вдоль этого контура равен нулю. Можно показать, что при $R \rightarrow \infty$ интеграл вдоль дуги окружности обращается в ноль. Таким образом, приходим к результату

$$Y_1(x, t) = 0 \text{ при } t < x. \quad (16)$$



Контур для вычисления интеграла (14).

Дифференцируя (18) по x , получим:

$$\exp[-x\bar{\mu}(p)]\bar{f}(p) \leftarrow_{**} \begin{cases} f(t-x)\exp(-\rho x) + \sigma x \int_x^t f(t-\tau)\exp(-\rho\tau) \frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} d\tau, t > x. \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (19)$$

Положим в (19) $\bar{f}(p) = 1$, тогда $f(t) = \delta(t)$ – функция Дирака. Теперь из (19) находим:

$$\exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow_{**} \begin{cases} \exp(-\rho x)\delta(t-x) + \sigma x \exp(-\rho x) \frac{I_1(\sigma\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}, t > x, \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (20)$$

Пусть теперь в (19) $\bar{f}(p) = \frac{1}{p}$, $f(t) = 1$. Находим:

$$\frac{1}{p} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow_{**} \begin{cases} \exp(-\rho x) + \sigma x \int_x^t \exp(-\rho\tau) \frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} d\tau, t > x, \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (21)$$

Полагая в (18) $\bar{f}(p) = \frac{1}{p}$, $f(t) = 1$, запишем:

$$\frac{1}{p\mu(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow_{**} \begin{cases} \int_x^t \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau, t > x, \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (22)$$

Найдем оригинал следующего изображения:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \bar{f}(p) &= \frac{p+2\beta}{\mu(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \bar{f}(p) = \left\{ p \left[\frac{1}{\mu(p)} \exp(-x\bar{\mu}(p)) \right] \right\} \bar{f}(p) + \\ &+ 2\beta \left\{ \frac{1}{\mu(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \right\} \bar{f}(p) \leftarrow_* \int_0^t f(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) \right] \eta(\tau-x) d\tau + \\ &+ \int_0^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) \delta(\tau-x) d\tau + 2\beta \int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau = \\ &= f(t-x) \exp(-\rho x) - (2\beta - \rho) \int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau + \\ &+ \int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) \left[\frac{\sigma\tau I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} \right] d\tau = f(t-x) \exp(-\rho x) + \\ &+ \int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) \left[\frac{\sigma\tau I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} - \sigma I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \bar{f}(p) \leftarrow_* f(t-x) \exp(-\rho x) + \\ + \int_x^t f(t-\tau) \exp(-\rho\tau) \left[\frac{\sigma\tau I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} - \sigma I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) \right] d\tau, t > x. \end{aligned} \quad (23)$$

Положим в (23) $\bar{f}(p) = \frac{1}{p}$, $f(t) = 1$. Получим:

$$\frac{1}{p} \sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow_* \exp(-\rho x) + \int_x^t \exp(-\rho\tau) \left[\frac{\sigma\tau I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} - \sigma I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) \right] d\tau, t > x. \quad (24)$$

Полученные оригиналы приводят к ряду интересных соотношений для несобственных интегралов, содержащих функции Бесселя. Используя теорему обращения для преобразования Лапласа, запишем соотношение (17) в виде:

$$\frac{1}{\mu(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] = \int_0^\infty \exp(-\rho t - pt) I_0(\sigma\sqrt{t^2-x^2}) \eta(t-x) dt = \int_x^\infty \exp[-t(p+\rho)] I_0(\sigma\sqrt{t^2-x^2}) dt. \quad (25)$$

Продифференцируем обе части равенства (25) по x :

$$\exp[-x\bar{\mu}(p)] = \exp[-(\rho+p)x] + \sigma x \int_x^\infty \exp[-t(\rho+p)] \frac{I_1(\sigma\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}} dt. \quad (26)$$

Справедливость этой операции вытекает из равномерной сходимости интеграла (26). Кроме того, обе части равенства (26) – непрерывные функции по p , следовательно, полагая $p \rightarrow 0$, находим:

$$\int_x^{\infty} \exp(-\rho t) \frac{I_1(\sigma\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}} dt = (1/(\sigma x)) \left[\exp(-2x\sqrt{\alpha\beta}) - \exp(-\rho x) \right]. \quad (27)$$

Полагая в (25) $p \rightarrow 0$, получим:

$$\int_x^{\infty} \exp(-\rho t) I_0(\sigma\sqrt{t^2-x^2}) dt = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \exp(-2x\sqrt{\alpha\beta}). \quad (28)$$

Следующий класс изображений, представляющий интерес для теории теплового удара вязкоупругих тел [2], имеет вид:

$$\bar{Q}(x, p) = \frac{1}{p} \exp \left[-xp \sqrt{\frac{p+(\beta_1+\beta_2)}{p+\beta_2}} \right], \quad (29)$$

где $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Для выяснения возможного вида оригинала (29) предварительно исследуем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}} \exp \left\{ \left[-\frac{p}{p+2\beta} x \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right] + pt \right\} dp,$$

применяя для этих целей приведенную выше методику (11)–(16). Устанавливаем, что оригинал $Q(x, t)$ имеет вид

$$Q(x, t) = F(x, t) \eta(t-x), \quad (30)$$

$$\text{где } F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \exp \left[-xp \sqrt{\frac{p+(\beta_1+\beta_2)}{p+\beta_2}} + pt \right] dp. \quad (31)$$

Контурный интеграл в (31) имеет две точки ветвления и вычисляется по известным правилам операционного исчисления [1]. Находим окончательный результат в виде:

$$\frac{1}{p} \exp \left[-xp \sqrt{\frac{p+(\beta_1+\beta_2)}{p+\beta_2}} \right] \leftarrow_{*} \leftarrow_{*} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} \frac{1}{y+\beta_2} \exp[-(y+\beta_2)t] \sin \left[x(y+\beta_2) \sqrt{\frac{\beta_1-y}{y}} \right] dy \right\} \eta(t-x). \quad (32)$$

Как следует из (32), оригинал $Q(x, t)$ допускает скачок при переходе через значение $t = x$. Величина этого скачка равна

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow x+0} F(x, t)\eta(t-x) = \lim_{z \rightarrow 0} F(x, x+z)\eta(z) = F(x, x) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} \frac{1}{y + \beta_2} \exp[-(y + \beta_2)x] \sin \left[x(y + \beta_2) \sqrt{\frac{\beta_1 - y}{y}} \right] dy. \tag{33}$$

Рассчитаем ту же величину $|\Delta|$, используя операционный подход. Прежде всего, отметим, что для функции (30) имеет место соотношение

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [p\bar{Q}(x, p) \exp(px)] = F(x, x). \tag{34}$$

Докажем (34). Имеем:

$$\bar{Q}(x, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)Q(x, t)dt = \int_x^{\infty} \exp(-pt)F(x, t)dt = \exp(-px) \int_0^{\infty} \exp(-pz)F(x, x+z)dz,$$

откуда $\bar{Q}(x, p) \exp(px) = \int_0^{\infty} \exp(-pz)F(x, x+z)dz.$

Переходя в интеграле к переменной $u = pz$, получим

$$p\bar{Q}(x, p) \exp(px) = \int_0^{\infty} \exp(-u)F(x, x + \frac{u}{p})du.$$

Переход к пределу при $p \rightarrow \infty$ с учетом (29) и (34) приводит к соотношению

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} [p\bar{Q}(x, p) \exp(px)] = \exp[-(\beta_1 x / 2)]. \tag{35}$$

Отсюда и из (33) приходим к интересному результату:

$$1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} \frac{1}{y + \beta_2} \exp[-(y + \beta_2)x] \sin \left[x(y + \beta_2) \sqrt{\frac{\beta_1 - y}{y}} \right] dy = \exp[-(\beta_1 x / 2)], \tag{36}$$

требующему специального объяснения (что предполагается сделать в последующей публикации). Из (31) по правилу дифференцирования оригинала $\int_0^t f(\tau)d\tau \xrightarrow[*]{*} (1/p)\bar{f}(p)$ находим еще один оригинал для изображения, также представляющего интерес для операционного исчисления:

$$\exp \left[-xp \sqrt{\frac{p + (\beta_1 + \beta_2)}{p + \beta_2}} \right] \xleftarrow[*]{*} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} \frac{1}{y + \beta_2} \exp[-(y + \beta_2)t] \sin \left[x(y + \beta_2) \sqrt{\frac{\beta_1 - y}{y}} \right] dy \right\} \delta(t-x) + \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} \exp[-(y + \beta_2)t] \sin \left[x(y + \beta_2) \sqrt{\frac{\beta_1 - y}{y}} \right] dy \right\} \eta(t-x). \tag{37}$$

В заключение выпишем операционные решения краевых задач (2)–(7) в обобщенных переменных:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{a\tau_r}}, \tau = t / \tau_r, Bi^* = h\sqrt{a\tau_r}, W(\xi, \tau) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_c - T_0} \text{ для случаев (4)–(6) и}$$

$$W(\xi, \tau) = \frac{T(x, t) - T_0}{q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda} \text{ для случая (5).}$$

Находим:

$$\bar{W}(\xi, p) = \bar{f}(p) \exp\left[-\xi \sqrt{p(p+1)}\right], \quad (38)$$

$$\text{где } \bar{f}(p) = \frac{1}{p} \text{ в случае (4), } \bar{f}(p) = \frac{p+1}{p^{3/2}} \text{ в случае (5), } \bar{f}(p) = \frac{Bi^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p} + Bi^* \sqrt{p+1})} \text{ в случае (6).}$$

Все оригиналы находятся по приведенным выше соотношениям. В [3] показано, что оригиналы изображений (38) допускают переход к новым функциональным конструкциям, эквивалентным приведенным выше и весьма удобным для проведения численных экспериментов. В этом есть одна из особенностей решений гиперболических моделей переноса для частично ограниченных областей.

Выводы

Представлены оригиналы нестандартных изображений, входящие в операционные реше-

ния широкого класса математических моделей в теории переноса (теплоты, массы, импульса), в теории электрических цепей, в теории теплового удара вязкоупругих тел и др. Дальнейшее развитие проблемы – переход к цилиндрическим координатам для радиальных градиентов изучаемых физических величин.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы:

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2013. 651 с.
2. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS, 2018. 1080 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2018. Т. 13. № 2. С. 81–90. <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2018-13-2-81-90>
4. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Карташов Э.М. (Общая редакция). Методы решения параболических и гиперболических уравнений переноса тепла, массы, импульса. М.: URSS, 2016. 336 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей переноса // Инжен.-физич. журнал. 2014. Т. 87. № 5.С. 1072–1082.
7. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М.: Иностранная Литература, 1948. 294 с.
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964. 772 с.

References:

1. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical theory of heat conduction and applied thermoelasticity. Moscow: URSS Publ., 2013. 651 p. (in Russ.).
2. Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications. Moscow: URSS Publ., 2018. 1080 p. (in Russ.).
3. Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic models of unsteady thermal conductivity. *Tonkie Khimicheskie Tekhnologii = Fine Chemical Technologies*. 2018;13(2):81-90 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2018-13-2-81-90>
4. Kudinov V.A., Kudinov I.V., Kartashov E.M. (General edition). Methods for solving parabolic and hyperbolic equations for the transfer of heat, mass, momentum. Moscow: URSS Publ., 2016. 336 p. (in Russ.).
5. Lykov A.V. Theory of heat conduction. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russ.).
6. Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic models of transfer. *Inzhenerno-Fizicheskii zhurnal = Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2014;87(5):1072-1082. (in Russ.).
7. Carslow H., Eger D. Operational methods in applied mathematics. Moscow: Inostrannaya literatura Publ., 1948. 294 p. (in Russ.).
8. Ango A. Mathematics for electrical and radio engineers. Moscow: Nauka Publ., 1964. 772 p. (in Russ.).

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

About the author:

Eduard M. Kartashov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo pr., Moscow 119571, Russia).

Для цитирования: Карташов Э.М. Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2019. Т. 14. № 4. С. 77–86. <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2019-14-4-77-86>

For citation: Kartashov E.M. Originals of operating images for generalized problems of unsteady heat conductivity. *Tonkie Khimicheskie Tekhnologii = Fine Chemical Technologies*. 2019;14(4):77-86 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2019-14-4-77-86>