УДК 544.032

ВЫБОР ЯДЕР РЕЛАКСАЦИИ ПРИ ОПИСАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОБЛАСТИ ФОНА ДИССИПАТИВНЫХ ПОТЕРЬ НА СПЕКТРЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

А.А. Валишин, Э.М. Карташов, А.А. Кухтенкова[@], В.А. Ломовской

Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: anastasij-92@mail.ru

Анализ экспериментальных спектров внутреннего трения tgδ - f(T) показывает, что наиболее «простым» спектром обладают монокристаллические металлические материалы, для которых диссипация части энергии внешнего силового воздействия представляется в виде фона внутреннего трения. Фон слабо и монотонно возрастает при гомологических температурах $\theta < 0.\ 2 \div 0.4$ и экспоненциально возрастает при $\theta > 0.4$. Учитывая, что в монокристаллических системах могут присутствовать дефекты в виде дислокаций, а концентрация точечных дефектов, связанных с атомами внедрения, минимальна, можно допустить, что данная монокристаллическая система состоит из одной агрегатной подсистемы, имеющей линейные дефекты. Для описания неупругой реакции данной подсистемы в области релаксационно возрастающего фона диссипативных потерь были рассмотрены в качестве ядер релаксации различные аналитические функции, наиболее часто используемые при описании явлений неупругости. Показано, что ядра Работнова, Ржаницына и Гаврильяка-Негами не удовлетворяют асимптотическим условиям сходимости рядов при положительных значениях входящих в них параметров. В этом случае они не могут быть использованы в качестве функций релаксации, описывающей реакцию агрегатной подсистемы в интервале температур выше гомологической температуры 0.4. Описание вязкоупругой реакции высокотемпературной ветви фона внутреннего трения и соответственно температурно-частотного изменения модуля сдвига возможно лишь при использовании функции Максвелла или функции Кольрауша, которая переходит в функцию Максвелла при единичном значении параметра дробности.

Ключевые слова: *внутреннее трение, неупругость, релаксация, ядра релаксации.*

THE CHOICE OF RELAXATION IN DESCRIBING MECHANICAL CHARACTERISTICS OF HIGH TEMPERATURE AREA OF DISSIPATIVE LOSS IN THE SPECTRUM OF INTERNAL FRICTION

A.A. Valishin, E.M. Kartashov, A.A. Kukhtenkova[@], V.A. Lomovskoy

Moscow Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow 119571, Russia
[@]Corresponding author e-mail: anastasij-92@mail.ru

The analysis of experimental internal friction spectrum tgδ - f(T) shows that monocrystalline metallic materials possess the simplest spectrum. For those materials, dissipation of a part of the energy of external power impact exists in a form of internal friction background. The background increases slightly and monotonously at homologous temperatures $\theta < 0.2 \div 0.4$, and it increases exponentially at $\theta > 0.4$. Taking into consideration the fact that monocrystalline systems may contain defects in the form of disturbance, and the concentration of point defects related to implantation atoms is minimal, one can suppose that this monocrystalline system consists of one aggregate subsystem having flat defects. Different analytical functions, which are often used in describing the inelasticity phenomenon, were studied as relaxation cores for describing the inelastic response of such subsystem in the area of increasing relaxation background of *dissipative loss. It is shown that Rabotnov's, Rzhanitsin's and Havriliak–Negami's cores don't satisfy the asymptotic conditions for the convergence of series with positive values of incoming characteristics. In this case they cannot be used as relaxation functions describing the response of the aggregative subsystem in the temperature range which is higher than homologous temperature 0.4. Description of the viscoelastic response of the high-temperature background internal friction and, accordingly, of the temperature-frequency change of shear modulus is possible only when using Maxwell's or Kolrausch's function which transforms into Maxwell's function only at a single value of fractionality parameter.*

Keywords: *internal friction, inelasticity, relaxation, core relaxation.*

Исследование диссипативных явлений по анализу спектров внутреннего трения в различных по химической природе материалах показывает, что на температурной зависимости $tg\delta - f(T)$ может наблюдаться как монотонно возрастающий фон диссипативных потерь (при повышении температуры), так и пики потерь, накладывающиеся на возрастающий фон [1–3]. Анализ приведенных экспериментальных спектров внутреннего трения $tg\delta - f(T)$ показывает, что наиболее «простым» спектром обладают монокристаллические металлические материалы, для которых диссипация части энергии внешнего силового воздействия представляется в виде фона внутреннего трения. Фон слабо и монотонно возрастает при гомологических температурах[1] $\theta < 0.2 \div 0.4$ и экспоненциально возрастает при $\theta > 0.4$ [4]. Учитывая, что в монокристаллических системах могут присутствовать дефекты в виде дислокаций, а концентрация точечных дефектов, связанных с атомами внедрения, минимальна, можно допустить, что данная монокристаллическая система состоит из одной агрегатной подсистемы, имеющей линейные дефекты. В этом случае в интервале температур $\theta < 0.2 \div 0.4$ возможно проявление двух механизмов внутреннего трения: гистерезисного (при низких частотах внешнего деформирующего воздействия) и резонансного (при высоких частотах внешнего деформирующего воздействия). Постоянство частоты внешнего воздействия, но изменение температуры исследуемой системы приводит к тому, что в интервале температур $\theta > 0.4$ механизм внутреннего трения сменяется с гистерезисного на релаксационный. Расчет интенсивности диссипативных потерь при гомологических температурах $\theta < 0.2 \div 0.4$ показал, что для монокристаллических систем механизм внутреннего трения может быть удовлетворительно описан с позиций гистерезисного внутреннего трения, обусловленного подвижностью дислокаций, как единственных дефектов структуры.

Цель работы: выявление возможности описания релаксационных процессов, наблюдаемых по спектрам внутреннего трения в области температур стеклования или кристаллизации систем различного химического строения и структуры.

[1] Под гомологической температурой понимается отношение текущей температуры T к температуре кристаллизации $T_{кр}$: $\theta = T/T_{кр}$

Экспериментальная часть

Релаксационный механизм фона от реакции дислокаций проявляется в виде экспоненциально возрастающей ветви потерь при температурах, приближающихся к температуре плавления. Описание релаксационного поведения данной структурно-кинетической подсистемы в рамках феноменологического подхода вязкоупругой реакции может быть проведено по двум направлениям:

1 – по температурно-частотной зависимости возрастающей ветви фона внутреннего трения, исходя из возможности уменьшения релаксирующего модуля сдвига до нуля;

2 – описание возрастающей ветви диссипативных потерь с помощью такой функции релаксации (или ядра релаксации), которая обеспечивает прохождение кривой векторной диаграммы комплексного модуля упругости через начало координат [5–7].

В первом случае температурно-частотная зависимость релаксирующего модуля и соответственно возрастающей ветви фона внутреннего трения может быть описана с использованием функции распределения времен релаксации, которая асимптотически приближает диссипативные потери к неограниченному росту при стремлении дефекта модуля к единичному значению, а модуля к нулю.

Основным моментом в анализе вязкоупругой реакции исследуемой системы на внешнее деформирующее воздействие является вопрос о выборе функции или ядра релаксации в описании температурных зависимостей компонентов комплексного модуля упругости.

Результаты и их обсуждение

Для аналитического представления функции релаксации как напряжения, так и модуля упругости (сдвига) используются различные математические выражения. Это может быть функция Кольрауша, функция Работнова, функция Ржаницына, функция Больцмана-Слонимского, функция Гаврильяка-Негами и т.д. В общем случае математическая зависимость между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ для вязкоупругих систем в тензорном виде представляет мгновенное значение тензора напряжений от истории компонент тензора деформаций и имеет вид:

$$\sigma_{ij}(t) = \overset{\infty}{\underset{\Theta=0}{\Psi}}\left[\varepsilon_{kl}(t-\Theta), \varepsilon_{kl}(t)\right] \qquad (1)$$

где $\overset{\infty}{\underset{\Theta=0}{\Psi_{ij}}}[\ldots]$ – линейный тензорозначный функционал, преобразующий каждую историю изменения деформации $\varepsilon_{ij}(t)$ при $-\infty \le t \le \infty$ в соответствующую историю изменения напряжения $\sigma_{ij}(t)$. Этот функционал параметрически зависит от текущего значения деформации $\varepsilon_{kl}(t)$ и соответствует эффекту мгновенной упругости. Если история деформации $\varepsilon_{kl}(t)$ является непрерывной, а функционал $\overset{\infty}{\underset{\Theta=0}{\Psi_{ij}}}[\ldots]$ – линейным, то соотношение (1) может быть представлено в виде интеграла Стилтьеса в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{kl}(t-\Theta)\, d\varphi_{ijkl}(\Theta) \qquad (2)$$

где $\varphi_{ijkl}(\Theta)$ – тензорная функция релаксации (тензор 4-го ранга). При этом $\varphi_{ijkl}(\Theta)$ при $-\infty < t < 0$. Данная формула «наследственного» уравнения показывает, что напряжение $\sigma_{ij}(t)$ не зависит от каких либо сдвигов по шкале времени, т.е. это соотношение инвариантно по отношению к периоду Θ во времени. Если при $t < 0$ деформация $\varepsilon_{ij}(t) = 0$, а тензорная функция релаксации $\varphi_{ijkl}(\Theta)$ и ее первая производная $d\varphi_{ijkl}(\Theta) / d\Theta$ непрерывны на интервале $0 \le t \le \infty$, то соотношение (2) представляется в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \varphi_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^{t} \varepsilon_{kl}(t-\Theta)\frac{d\varphi_{ijkl}(\Theta)}{d\Theta}d\Theta \qquad (3)$$

Или после интегрирования по частям:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{t} \varphi_{ijkl}(t-\Theta)\frac{d\varepsilon_{kl}(\Theta)}{d\Theta}d\Theta \qquad (4)$$

Функции $\varphi_{ijkl}(t-\Theta)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$1)\ \lim_{\Theta\to 0}\varphi(t-\Theta) = \lim_{t\to 0^+}\varphi(t) = +\infty;\ 2)\ \text{интеграл} \int_0^t \varphi(\Theta)\,d\Theta\ \text{должен сходиться.} \qquad (5)$$

В этом случае функция $\varphi(t)$ является слабосингулярной, где стремление $t \to 0^+$ рассматривается с моментов времени $t_i \ge t$, т.е. с положительной области времен.

Представляет интерес определить те функции или ядра релаксации, которые отвечают условиям слабой сингулярности и могут быть использованы для описания фона диссипативных потерь на спектре внутреннего трения в интервале температур $\theta > 0.4$.

Для определения этих функций необходимо ввести еще четыре асимптотических условия, которые должны удовлетворять функциям (ядрам) релаксации:

$$1)\ \lim_{t=0}\varphi(t) = 1;\ 2)\ \lim_{t\to 0}\varphi(t) = \lim_{p\to\infty} p\bar{\varphi}(p);\ 3)\ \lim_{t=0}\varphi(t) = 0 \equiv const;\ 4)\ \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{p\to 0} p\bar{\varphi}(p) \qquad (6)$$

I. Ядро Максвелла. Данное ядро имеет вид:

$$\varphi(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right], \text{где } t > 0 \qquad (7)$$

Преобразование Лапласа для этой функции релаксации будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{\varphi}(p) = \Lambda\left[\varphi(t)\right] = \frac{1}{p + \left(\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\tau}{p\tau + 1} \qquad (8)$$

Разложение ядра (7) в ряд Маклорена имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{-(t/\tau)} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^n$$

где $-\infty < t/\tau < \infty$. Преобразование Лапласа для этого разложения:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(p) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{\tau^n}\Lambda\left[t^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{\tau^n}\cdot\frac{n!}{p^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\tau}{(p\tau)^{n+1}} = \tau\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(p\tau)^{n+1}} = \tau\left[(p\tau)^{-1} - (p\tau)^{-2} + (p\tau)^{-3} - \ldots\right]\end{aligned} \qquad (9)$$

Необходимо установить сходимость ряда (9) к преобразованию (8), для чего производится сравнение ряда (9) с биноминальным рядом:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$, откуда следует:

$$x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x} \qquad (10)$$

Из результатов сравнения рядов (9) и (10) следует:

$$\bar{\varphi}(p)=\tau\frac{(p\tau)^{-1}}{1+(p\tau)^{-1}}=\tau\frac{1/p\tau}{1+1/p\tau}=\tau\frac{p\tau}{p\tau(p\tau+1)}=\frac{\tau}{p\tau+1} \qquad (11)$$

Таким образом, ряд (9) сходится к преобразованию (8) при условии, что $|p\tau|^{-1}<1$ или при $|p|>\frac{1}{\tau}$. Это означает, что ряд (9) сходится к (8) вне круга радиуса $\frac{1}{\tau}$ на комплексной плоскости *p*.

Однако необходимо выяснить, что же происходит на границе круга и внутри его. В соотношении (8) использовано представление вида: $\Lambda\left[t^n\right]=n!/p^{n+1}$ или $t^n \Rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$. Это имеет место при $\operatorname{Re} p>0$, т.е. в правой части комплексной плоскости, что означает, что каждый член ряда (9) должен быть таким, чтобы $\operatorname{Re} p>0$.

Функцию $\bar{\varphi}(p)$ в (8) можно заменить рядом двумя способами. Если разложить эту функцию по степеням *(pτ)*, то:

$$\bar{\varphi}(p)=\frac{\tau}{p\tau+1}=\tau\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(p\tau)^n=\tau\left[1-p\tau+(p\tau)^2-\ldots\right] \qquad (12)$$

Этот ряд сходится при $|p\tau|<1$ или при $p<1/\tau$, т.е. внутри круга радиуса $1/\tau$. Вне этого круга ряд (12) расходится и поэтому не представляет функцию $\bar{\varphi}(p)$.

Ряд (12) не удовлетворяет необходимому условию существования изображения по Лапласу: его члены не стремятся к нулю при $p\to\infty$. Данный ряд не годится при больших значениях $|p|$ и его можно использовать только внутри ограниченного круга. Таким образом, ряд (12) описывает асимптотическое поведение изображения $\bar{\varphi}(p)$ при малом значении *p*.

Из асимптотических свойств преобразования Лапласа следует, что поведение изображения при малых *p* соответствует поведению оригинала при больших значениях *t*. Возникает проблема, в которой, зная асимптотическое разложение изображения $\bar{\varphi}(p)$ при малых *p*, необходимо найти асимптотическое разложение оригинала $\bar{\varphi}(p)$ при больших значениях *t*. Для обращения ряд (12) не годится, так как члены его не являются изображениями каких-либо оригиналов.

Необходимо разложить изображение $\bar{\varphi}(p)$ в такой ряд, чтобы его члены также были изображениями. Тогда и возможно будет произвести обращение. Для функции $\bar{\varphi}(p)$ в виде (8) такое разложение имеет следующий вид:

$$\bar{\varphi}(p)=\frac{\tau}{p\tau+1}=\frac{\tau}{p\tau\left[1+(p\tau)^{-1}\right]}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+(p\tau)^{-1}}$$

где возможно произвести разложение в степенной ряд:

$$\frac{1}{1+(p\tau)^{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(p\tau)^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(p\tau)^n}$$

В этом случае изображение   принимает следующий вид:

$$\bar{\varphi}(p)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(p\tau)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{n+1}\tau^n}=\tau\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(p\tau)^{n+1}}=\tau\left(\frac{1}{p\tau}-\frac{1}{(p\tau)^2}+\frac{1}{(p\tau)^3}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(p\tau)^{n+1}}+\ldots\right) \qquad (13)$$

Круг сходимости этого ряда (при соответствующей замене переменных) определяется в виде:

$$U_n = \frac{(-1)^n}{(p\tau)^{n+1}}; \quad U_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(p\tau)^{n+2}}\ )$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(p\tau)^{n+1}}{(p\tau)^{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|p\tau|} = \frac{1}{|p\tau|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |p| > \frac{1}{\tau}$$

Это внешняя часть круга радиусом $1/\tau$. Вне этого круга ряд сходится к функции $\overline{\varphi}(p)$ (соотношение 7). Внутри круга функция $\overline{\varphi}(p)$ по (7) не может быть представлена рядом (13).

Рассмотрим обращение ряда (13). Все члены этого ряда имеют особую точку $p = 0$. В уравнении обращения Лапласа $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$ интегрирование производится по любой вертикальной прямой, лежащей в полуплоскости аналитического изображения, т.е. справа от всех особых точек. По свойствам степенных рядов, ряд (13) можно почленно интегрировать по любой прямой справа от круга. Поэтому обращение ряда (13) может быть представлено в виде:

$$\Lambda^{-1}\left[\overline{\varphi}(p)\right] = \tau\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\tau^{n+1}}\Lambda^{-1}\left[\frac{1}{p^{n+1}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^n \quad (14)$$

Полученный ряд (14) сходится при любых значениях $1/\tau$, т.е. его интервал сходимости представляет собой всю числовую ось. Его суммой является экспонента $e^{-(t/\tau)}$. В этом случае:

$$\Lambda^{-1}\left[\overline{\varphi}(p)\right] = \psi(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad (15)$$

Из изложенного выше следует, что ряд (13) представляет изображение функции $\overline{\varphi}(p)$ (соотношение 8) только вне круга на комплексной плоскости. Это изображение возможно только на правой полуплоскости этого круга. Внутри круга этот ряд (13) не представляет изображения функции (8). Однако оригинал ряда (8) представляет экспоненту, т.е. является оригиналом для изображения (8) на всей числовой оси.

II. Ядро Кольрауша. Представляет собой дробную экспоненту вида:

$$\varphi(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^b\right]; \quad 0 < b \le 1 \quad (16)$$

Преобразование Лапласа для этой функции:

$$\overline{\varphi}(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(t/\tau\right)^b} e^{-pt}dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left[\left(t/\tau\right)^b + pt\right]}dt \quad (17)$$

Вычисление в аналитическом виде данной функции затруднительно, поэтому применяется аппроксимация функции (16) с разложением ее в степенной ряд:

$$e^{-\left(t/\tau\right)^b} = 1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^b + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{2b} - \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3b} + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{nb} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{nb} \quad (18)$$

Интервал сходимости этого ряда – вся числовая ось, т.е. при любых значениях t этот ряд представляет функцию (16). Преобразование Лапласа к соотношению (18) имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \Lambda\left[e^{-\left(t/\tau\right)^b}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\tau^{nb}}\Lambda\left[t^{nb}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\tau^{nb}}\cdot\frac{\Gamma(nb+1)}{p^{nb+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\tau\Gamma(nb+1)}{(p\tau)^{nb+1}} = \tau\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\Gamma(nb+1)}{n!}\cdot\frac{1}{(p\tau)^{nb+1}}\end{aligned} \quad (19)$$

Этот ряд сходится во внешней части некоторого круга, а именно (приняв обозначения):

$$U_n = (-1)^n\frac{\Gamma(nb+1)}{n!}\cdot\frac{1}{(p\tau)^{nb+1}};$$

$$U_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{\Gamma(nb+b+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(p\tau)^{nb+b+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\Gamma(nb+b+1)n!(p\tau)^{nb+1}}{(n=1)!(p\tau)^{nb+b+1}\cdot\Gamma(nb+1)}\right| = \frac{1}{|p\tau|^b}\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(nb+b+1)}{\Gamma(nb+1)}\cdot\frac{1}{n+1} = 0$$

при $|p| > 0$. Таким образом, ряд (19) сходится во всей комплексной плоскости, кроме начала координат. Но поскольку каждый член ряда (19) имеет смысл лишь в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, то ряд может рассматриваться также при всех значениях $\operatorname{Re} p > 0$.

III. Ядро Работнова. Данное ядро имеет вид ряда:

$$\varphi(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(t/\tau \right)^{\gamma n}}{\Gamma\left[\gamma(n+1)\right]}; \quad 0 < \gamma \le 1 \tag{20}$$

Для определения интервала сходимости рассматривается предел (с учетом обозначений):

$$U_n = \frac{(-1)^n \left(t/\tau \right)^{\gamma n}}{\Gamma\left[\gamma(n+1)\right]};$$

$$U_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \left(t/\tau \right)^{\gamma(n+1)}}{\Gamma\left[\gamma(n+2)\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(t/\tau \right)^{\gamma(n+1)} \cdot \Gamma\left[\gamma(n+1)\right]}{\Gamma\left[\gamma(n+2)\right]\cdot\left(t/\tau \right)^{\gamma n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma} \frac{\Gamma\left[\gamma(n+1)\right]}{\Gamma\left[\gamma(n+2)\right]} =$$
$$= \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma} \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left[\gamma(n+1)\right]}{\Gamma\left[\gamma(n+2)\right]} = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma} < 1 \tag{21}$$

Из этого следует, что ряд (21) сходится при малых временах, так как $\left(t/\tau \right) < 1$, т.е. $t < \tau$. Однако в соотношении (20) перед знаком суммы имеется множитель $\frac{1}{t}$, за счет которого при $t \to \infty$ ряд $\varphi(t)$ расходится $\varphi(t) \to \infty$.

Для получения преобразования Лапласа от ядра Работнова последнее можно представить в виде:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{\gamma(n+1)-1}}{\tau^{\gamma(n+1)} \cdot \Gamma\left[\gamma(n+1)\right]}$$

В этом случае:

$$\varphi(p) = \Lambda\left[\psi(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Lambda\left[t^{\gamma(n+1)-1}\right]}{\tau^{\gamma(n+1)} \cdot \Gamma\left[\gamma(n+1)\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left[\gamma(n+1)\right]}{\tau^{\gamma(n+1)} \cdot \Gamma\left[\gamma(n+1)\right] \cdot p^{\gamma(n+1)}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\tau^{\gamma(n+1)} \cdot p^{\gamma(n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(p\tau)^{\gamma(n+1)}}$$

Этот ряд сходится вне круга $|p| > 1/\tau$. Область сходимости данного ряда определена в виде:

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{1+(p\tau)^{\gamma}}; \quad |p\tau| > 1 \quad (22)$$

В полученном соотношении не сходится размерность, так как изображение $\bar{\varphi}(p)$ должно иметь размерность времени, что следует из интеграла Лапласа. Данная ошибка определяется размерностью ядра Работнова (соотношение 20). Ядро (функция релаксации) должно быть безразмерным, а в соотношении 20 имеется размерность $\left[c^{-1}\right]$. Для исправления этой ошибки ядро Работнова должно иметь вид:

$$\varphi(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(t/\tau \right)^{\gamma n}}{\Gamma\left[\gamma(n+1)\right]},$$

тогда

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{\tau}{1+(p\tau)^{\gamma}} = \tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(p\tau)^{\gamma(n+1)}} \tag{23}$$

IV. Ядро Ржаницына. Изображение данного ядра имеет вид:

$$\bar{\varphi}_p(p) = \frac{\tau}{(1+p\tau)^{\gamma}} \tag{24}$$

V. Ядро Гаврильяка-Негами. Лапласовское изображение данного ядра представляется следующим образом:

$$\bar{\varphi}_{г-н}(p) = \frac{\tau}{\left[1+(p\tau)^{\alpha}\right]^{\gamma}} \tag{25}$$

Для определения возможности применения всех рассмотренных выше ядер при описании процессов релаксации в исследуемых системах, необходимо проверить эти ядра и их изображения на условия асимптотической сходимости.

Для ядра Максвелла:

$$\lim_{t\to 0}\varphi_m(t)=\lim_{t\to 0}e^{-\left(t/\tau\right)}=1 \text{ и } \lim_{t\to\infty}\varphi_m(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-\left(t/\tau\right)}=0$$

условия асимптотического схождения выполняются.

Для ядра Кольрауша эти условия также выполняются.

Для ядра Работнова:

$$\lim_{p\to 0}p\bar{\varphi}_p(p)=\lim_{p\to 0}\frac{p\tau}{1+(p\tau)^{\gamma}}=0,$$

т.е. $\lim_{t\to\infty}\varphi_p(t)=0$ – данное условие сходимости для ядра Работнова выполняется.

$$\lim_{p\to\infty}p\bar{\varphi}_p(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p\tau}{1+(p\tau)^{\gamma}}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1+z^{\gamma}}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\gamma z^{\gamma-1}}=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{\gamma-1}}=\begin{Bmatrix}0, \text{ при } \gamma>1\\ \infty, \text{ при } \gamma<1\end{Bmatrix}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\varphi(t)=\begin{Bmatrix}0, \text{ при } \gamma>1\\ \infty, \text{ при } \gamma<1\end{Bmatrix}$$

– данное условие сходимости для ядра Работнова не выполняется, поэтому функция Работнова не может удовлетворительно описывать релаксационные явления.

Для ядра Ржаницына:

$$\lim_{p\to 0}p\bar{\varphi}_p(p)=\lim_{p\to 0}\frac{p\tau}{(1+p\tau)^{\gamma}}=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\varphi_p(t)=0$$

– данное условие сходимости для ядра Ржаницына выполняется.

$$\lim_{p\to\infty}p\bar{\varphi}_p(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p\tau}{(1+p\tau)^{\gamma}}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(1+z)^{\gamma}}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\gamma(1+z)^{\gamma-1}}=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(1+z)^{\gamma-1}}=\begin{Bmatrix}0, \text{ при } \gamma>1\\ \infty, \text{ при } \gamma<1\end{Bmatrix}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\varphi_p(t)=\begin{Bmatrix}0, \text{ при } \gamma>1\\ \infty, \text{ при } \gamma<1\end{Bmatrix}$$

– данное условие сходимости для ядра Ржаницына не выполняется, поэтому функция Ржаницына не может удовлетворительно описывать релаксационные явления.

Для ядра Гаврильяка-Негами:

$$\lim_{p\to 0}p\bar{\varphi}_{г-н}(p)=\lim_{p\to 0}\frac{p\tau}{\left[1+(p\tau)^{\alpha}\right]^{\gamma}}=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\varphi_{г-н}(t)=0$$

– данное условие сходимости для ядра Гаврильяка-Негами выполняется.

$$\lim_{p\to\infty}p\bar{\varphi}_{г-н}(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p\tau}{\left[1+(p\tau)^{\alpha}\right]^{\gamma}}\Rightarrow\{p\tau=z\}\Rightarrow\lim_{z\to\infty}\frac{z}{\left(1+z^{\alpha}\right)^{\gamma}}=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}\right)^{\gamma}$$

Вводятся обозначения: $f(z)=\left(\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}\right)^{\gamma}$ и $\varphi(z)=\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}$, тогда $f(z)=\left[\varphi(z)\right]^{\gamma}$.

Предварительно необходимо найти предел функции *φ(z)*, а затем предел функции *f(z)*. При этом возникает несколько вариантов:

1) $\{\ \alpha>1,\quad \gamma>1\ \}$.

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{\gamma}z^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\alpha z^{\alpha-1}}=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}z^{\frac{1}{\gamma}-\alpha}=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{\alpha-1/\gamma}}$$

Так как $\alpha-\frac{1}{\gamma}>0,\ то\ \lim_{z\to\infty}\varphi(z)=0,\ т.е.\ \lim_{z\to\infty}f(z)=0\ и\ \lim_{t\to 0}=0$ – данное условие сходимости для ядра Гаврильяка-Негами при условии $\{\ \alpha>1,\quad \gamma>1\ \}$ не выполняется.

2) $\{0<\gamma<1;\ \alpha>1\}$.

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}z^{\frac{1}{\gamma}-\alpha}=\begin{Bmatrix}\infty,\ при\ \dfrac{1}{\gamma}>\alpha\\ 0,\ при\ \dfrac{1}{\gamma}<\alpha\end{Bmatrix}\Rightarrow\lim_{p\to\infty}p\overline{\varphi}_{г-н}(p)=\begin{Bmatrix}\infty,\ \dfrac{1}{\gamma}>\alpha\\ 0,\ \dfrac{1}{\gamma}<\alpha\end{Bmatrix}$$

т.е. данное условие сходимости для ядра Гаврильяка-Негами при условии $\{0<\gamma<1;\ \alpha>1\}$ также не выполняется.

3) $\{\gamma\gamma>1;\ 0<\alpha<1\}$.

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}z^{(1/\gamma)-\alpha}=\begin{Bmatrix}\infty;\ \dfrac{1}{\gamma}>\alpha\\ 0,\ \dfrac{1}{\gamma}<\alpha\end{Bmatrix}\Rightarrow\lim_{p\to\infty}p\overline{\varphi}_{г-н}(p)=\begin{Bmatrix}\infty,\ \dfrac{1}{\gamma}>\alpha\\ 0,\ \dfrac{1}{\gamma}<\alpha\end{Bmatrix}$$

т.е. данное условие сходимости для ядра Гаврильяка-Негами при условии $\{\gamma>1;\ 0<\alpha<1\}$ также не выполняется.

4) $\{0<\gamma<1;\ 0<\alpha<1\}$.

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{1/\gamma}}{1+z^{\alpha}}=\frac{1}{\gamma}\lim_{z\to\infty}z^{(1/\gamma)-\alpha}=\infty,\ т.к.\ \frac{1}{\gamma}>\alpha\Rightarrow\lim_{p\to\infty}p\overline{\varphi}_{г-н}(p)=\infty$$

т.е. данное условие сходимости для ядра Гаврильяка-Негами при условии $\{0<\gamma<1;\ 0<\alpha<1\}$ также не выполняется.

Таким образом, для предлагаемой функции Гаврильяка-Негами асимптотические условия не выполняются ни при каких положительных значениях коэффициентов α и γ.

Выводы

Ядра Работнова, Ржаницына и Гавлильяка-Негами не удовлетворяют асимптотическим условиям сходимости рядов при положительных значениях входящих в них параметров. В этом случае они не могут быть использованы в качестве функций релаксации, описывающей реакцию агрегатной подсистемы в интервале температур выше гомологической температуры 0.4. Описание вязкоупругой реакции высокотемпературной ветви фона внутреннего трения и соответственно температурно-частотного изменения модуля сдвига возможно лишь при использовании функции Максвелла или функции Кольрауша, которая переходит в функцию Максвелла при единичном значении параметра дробности.

Список литературы:

1. Валишин А.А., Горшков А.А., Ломовской В.А. Релаксационные явления и их механизмы в ликвирующих стеклах. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 169–182.

2. Горшков А.А., Ломовской В.А., Наими Е.К. О природе фона внутреннего трения в поликристаллическом палладии // Вестник МИТХТ. 2009. Т. 4. № 6. С. 85–89.

3. Коровайцева Е.А., Горшков А.А., Ломовской В.А. Дислокационный вклад в гистерезисный механизм внутреннего трения при гомологических температурах ниже 0.2 // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. № 2. С. 80–92.

4. Чадек И. Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 302 с.

5. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G., Tarlakovskii D.V. Propagation of one-dimensional non-

References:

1. Valishin A.A., Gorshkov A.A., Lomovskoy V.A. Relaxation phenomena and their mechanisms in livermush glasses // Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela (Mechanics of Solids). 2011. № 2. P. 169–182. (in Russ.).

2. Gorshkov A.A., Lomovskoy V.A., Naimi E.K. On the nature of background of internal friction in polycrystalline palladium // Vestnik MITHT (Fine Chemical Technologies). 2009.V. 4. № 6. P. 85–89. (in Russ.).

3. Korovaytseva E.A., Gorshkov A.A., Lomovskoy V.A. Dislocation contribution to the hysteretic internal friction at homologous temperatures below 0.2 // Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela (Mechanics of Solids). 2017. № 2. P. 80–92. (in Russ.)

4. Chadek I. Creep of metallic materials. Moscow: Mir, 1987. 302 p. (in Russ.)

5. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G., Tarlakovskii D.V. Propagation of one-dimensional non-

stationary waves in viscoelastic half space// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38. № 5. P. 827–832.

6. Коровайцева Е.А., Пшеничнов С.Г. Об исследовании переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругих телах с учетом непрерывной неоднородности материала // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78. № 3. С. 262–270.

7. Коровайцева Е.А. Влияние параметров ядер релаксации на распространение волн в вязкоупругом слое // Тез. докл. XI Всерос. школы-семинара. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2016. С. 72.

stationary waves in viscoelastic half space// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38. № 5. P. 827–832.

6. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G. The study of transient wave processes in linear viscoelastic bodies taking into account the continuous heterogeneity of the material // Problemy prochnosti i plastichnosti (Problems of Strength and Plasticity). 2016. V. 78. № 3. P. 262–270. (in Russ.)

7. Korovaytseva E.A. The influence of the parameters of kernels of relaxation on wave propagation in a viscoelastic layer // Abstracts of XI All-Russian School-Seminar. Rostov-on-Don: Southern Federal University Publ., 2016. 72 p. (in Russ.)

Об авторах:

Валишин Анатолий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

Карташов Эдуард Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

Кухтенкова Анастасия Александровна, старший преподаватель кафедры физики и технической механики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

Ломовской Виктор Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры химии и технологии переработки пластмасс и полимерных композитов Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

About authors:

Anatoliy A. Valishin, Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow, 119571, Russia).

Eduard M. Kartashov, Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow 119571, Russia).

Anastasiya A. Kukhtenkova, Senior Lecturer of the Chair of Physics and Technical Mechanics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow, 119571, Russia).

Victor A. Lomovskoy, Dr.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Chair of Chemistry and Technology of Plastics and Polymer Composites, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow, 119571, Russia).