КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕНОСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ.

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой, Л.М. Ожерелкова, доцент,

И.В. Антонова, старший преподаватель

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В.Ломоносова

e-mail: lilom@list.ru

В статье приводятся новые аналитические решения краевых задач переноса для уравнений гиперболического типа.

Ключевые слова: нестационарный теплоперенос, уравнения параболического типа, обобщенное уравнение энергии, гиперболические модели переноса, граничные условия интегрального вида.

Пусть D – конечная (или частично ограниченная) выпуклая область изменения $M(x, y, z)$, S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\hat{n}$ – внешняя нормаль к S ; $\Omega = (M \in D, t > 0)$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x, y, z, t) с основанием D при $t = 0$. Уравнение энергии для изотропных твердых тел

$$c\rho \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \hat{q}(M, t) + F(M, t), \quad (1)$$

$$(M, t) \in \Omega,$$

где $\hat{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ – вектор плотности теплового потока в классической феноменологии Фурье [1], приводит к уравнению нестационарного теплопереноса параболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + (1/c\rho)F(M, t), \quad (2)$$

$$(M, t) \in \Omega$$

и соответствующим краевым задачам для уравнения (2) с условиями

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D} \quad (3)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), \quad (4)$$

$$M \in S, \quad t > 0.$$

Для уравнений параболического типа (2) такого рода краевые задачи являются предметом практически необозримого числа исследований. С годами их поток не уменьшается, охватывая все новые содержательные математические объекты и все большее число самых разнообразных приложений, учитывая наличие хорошо разработанных аналитических методов, дающих точное решение задачи (1)–(4). Накопленные результаты в этой области приведены в книге [1] и обзоре [2].

В последние десятилетия в связи с изучением высокоинтенсивных (и других) процессов вырос интерес к гиперболическим моделям переноса (тепла, массы) на основе обобщенного закона Максвелла-Катанео-Лыкова [3]

$$\hat{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t) - \tau_p \frac{\partial \hat{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (5)$$

учитывающего конечную скорость распространения тепла; τ_p – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения тепла v_T соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_p}$, a – температуропроводность; смысл остальных параметров, входящих в (1)–(5), общеизвестен [1].

Закон (5) приводит к модификации уравнения теплопроводности, которое переходит из классического уравнения Фурье параболического типа (2) в уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T - \tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (\tau_p/c\rho) \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \tau_p F \right), \quad (6)$$

$$(M, t) \in \Omega.$$

и соответствующим краевым задачам обобщенного типа, имеющим обширные практические применения в различных вопросах науки и техники [1]. Однако следует подчеркнуть, что достигнутые успехи в нахождении точных аналитических решений краевых задач для уравнения (6) весьма незначительны. Последнее объясняется рядом причин, одной из которых являются технические трудности вычислительного характера. В то же время найденные решения во многих случаях содержат неточности как в самих функциональных конструкциях этих решений, так и в исходной постановке задачи. Для уравнения (6) чаще используются

классические граничные условия (4), а не интегральная (или эквивалентная ей дифференциальная) форма записи граничных условий, вытекающая из обобщенного закона (5). Вследствие этого приводимые в ряде публикаций численные эксперименты по кинетике теплового процесса не могут считаться истинными.

Цель настоящей публикации – провести сравнительный анализ аналитических решений гиперболических моделей переноса, имеющих традиционную постановку и постановку, развитую одним из авторов в [3, 4].

Рассмотрим область $\Omega = (x > 0, t > 0)$; этот случай чаще всего встречается в приложениях и поэтому в наибольшей степени требует уточнения. Уравнение (6) для этой области имеет вид (при $F = 0$):

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \tau_p \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$(x,t) \in \Omega.$

Начальные условия

$$T(x,t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \geq l. \quad (8)$$

Граничные условия в постановке (4) имеют вид:

первого рода (температурный нагрев)

$$T(x,t)|_{x=0} = T_C, \quad t > 0; \quad (9)$$

второго рода (тепловой нагрев)

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\lambda} T_C, \quad t > 0; \quad (10)$$

третьего рода (нагрев средой)

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T(x,t)|_{x=0} - T_C), \quad t > 0. \quad (11)$$

и, наконец, условие ограниченности решения в Ω :

$$|T(x,t)| < +\infty, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

В безразмерных переменных

$$\tau = t/\tau_p, \quad z = x/\sqrt{a\tau_p}, \quad \beta = h\sqrt{a\tau_p},$$

$$W_C = \frac{T_C\sqrt{a\tau_p}}{\lambda(T_C - T_0)}, \quad W(z,\tau) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_C - T_0} \quad (13)$$

задачи (7)-(12) имеют вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad z > 0, \quad \tau > 0, \quad (14)$$

$$W(z,\tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial W(z,\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad z \geq 0 \quad (15)$$

$$W(z,\tau)|_{z=0} = 1, \quad \tau > 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -W_C, \quad \tau > 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial W(z,\tau)}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = \beta [W(z,\tau)|_{z=0} - 1], \quad \tau > 0, \quad (18)$$

$$|W(z,\tau)| < +\infty, \quad z \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (19)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}(z,p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) W(z,\tau) d\tau \quad (20)$$

введем функцию

$$\bar{Q}(z,p) = \frac{1}{p} \exp[-z\sqrt{p(p+1)}], \quad (21)$$

где $\text{Re } p = \text{Re}(\sigma + i\omega) \geq \beta > 0, \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2}.$

Покажем, что все три решения уравнения (14) могут быть выражены через эту функцию.

Операционные решения задач (14) – (20) имеют вид:

$$\bar{W}(z,p) = \begin{cases} \bar{Q}(z,p) - 1 \text{ задача : (14)–(16), (19)} \\ W_C \int_z^\infty \bar{Q}(z',p) dz' - 2 \text{ задача : (14), (15), (17), (19)} \\ \beta \int_z^\infty \exp[-\beta(z'-z)] \bar{Q}(z',p) dz' - 3 \text{ задача : (14), (15), (18), (19)} \end{cases} \quad (22)$$

Оригинал $Q(z,\tau)$ может быть найден на основе соотношений, развитых в [4], и имеет вид:

$$Q(z,\tau) = \left[\exp\left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} \int_z^\tau \exp\left(-\frac{z'}{2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{z'^2 - z^2}\right)}{\sqrt{z'^2 - z^2}} dz' \right] \eta(\tau - z) = \Psi(z,\tau)\eta(\tau - z) \quad (23)$$

где $\eta(z)$ – импульсная функция, $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $\Psi(z, \tau)$ – функция, записанная в квадратных скобках.

Теперь можно выписать решения всех трех задач:

первая краевая задача (14)-(16), (19):

$$W(z, \tau) = \Psi(z, \tau)\eta(\tau - z); \quad (24)$$

вторая краевая задача (14), (15), (17), (19):

$$W(z, \tau) = W_C \int_z^\tau \Psi(z', \tau) dz' \quad (z < \tau); \quad (25)$$

третья краевая задача (14), (15), (18), (19):

$$W(z, \tau) = \beta \int_z^\tau \exp[-\beta(z' - z)] \Psi(z', \tau) dz', \quad (26)$$

$$(z < \tau).$$

Рассмотрим теперь новую постановку краевых задач для уравнения (7). Условия (8)-(9) остаются неизменными.

Граничные условия 2 и 3 родов, согласно [3-4], следует записать в виде:

$$\frac{1}{\tau_p} \int_0^t \frac{\partial T(x, t')}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_p}\right) dt' = -\frac{1}{\lambda} T_C, \quad (27)$$

$$t > 0;$$

$$\frac{1}{\tau_p} \int_0^t \frac{\partial T(x, t')}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_p}\right) dt' =$$

$$= h(T(x, t)|_{x=0} - T_C), \quad t > 0; \quad (28)$$

В безразмерных переменных (13) задача заключается в нахождении решения $W(z, \tau)$ уравнения (14), удовлетворяющего начальным условиям (15), условию ограниченности (19) и одному из трех видов граничных условий:

первого рода (16);

второго рода

$$\int_0^\tau \frac{\partial W(z, \tau')}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = W_C, \quad (29)$$

$$\tau > 0;$$

$$\bar{W}(z, p) = \beta \int_z^\infty [\bar{Q}(z', p) + \bar{Q}_1(z', p)] \exp[-\beta(z' - z)(p + 1)] dz'. \quad (37)$$

Для нахождения оригиналов нам понадобятся соотношения:

$$\bar{f}(p) \exp(-p\tau_0) \stackrel{\&}{\approx} f(\tau - \tau_0)\eta(\tau - \tau_0); \quad \delta(kz) = (1/k)\delta(z).$$

Находим оригиналы искомых решений.

Задача (14)-(16), (19):

$$W(z, \tau) = Q(z, \tau) \quad (z < \tau); \quad (38)$$

задача (14),(15),(29),(19):

$$\frac{W(z, \tau)}{W_C} = \exp(-\tau/2) + \int_z^\tau [\Psi(z', \tau) + \Psi_1(z', \tau)] dz' \quad (z < \tau) \quad (39)$$

третьего рода

$$\int_0^\tau \frac{\partial W(z, \tau')}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' =$$

$$= \beta [W(z, \tau)|_{z=0} - 1], \quad \tau > 0 \quad (30)$$

В пространстве изображений по Лапласу (20) нам понадобится оригинал изображения

$$\bar{Q}_1(z, p) = \exp[-z\sqrt{p(p+1)}], \quad (31)$$

отсутствовавший в известных справочниках по операционному исчислению. Как следует из (21) и (31) $\bar{Q}_1(z, p) = p\bar{Q}(z, p)$.

Последнее означает, что $Q_1(z, \tau) = \partial Q(z, \tau) / \partial \tau$. Равенство (23) перепишем далее в следующем виде:

$$Q(z, \tau) = \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \eta(\tau - z) +$$

$$+ \frac{z}{2} \int_z^\tau \exp\left(-\frac{z'}{2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{z'^2 - z^2}\right)}{\sqrt{z'^2 - z^2}} \eta(z' - z) dz' \quad (32)$$

Дифференцируя обе части (32) по τ , находим искомый оригинал:

$$Q_1(z, \tau) = \exp(-z/2) \delta(\tau - z) +$$

$$+ \Psi_1(z, \tau) \eta(\tau - z) \quad (33)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, $\Psi_1(z, \tau) = \partial \Psi(z, \tau) / \partial \tau$,

$$\Psi_1(z, \tau) = \frac{z}{2} \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - z^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - z^2}} \quad (34)$$

Операционное решение сформулированных задач имеет вид:

1 задача – граничное условие (16):

$$\bar{W}(z, p) = \bar{Q}(z, p); \quad (35)$$

2 задача – граничное условие (29):

$$\bar{W}(z, p) = W_C \int_z^\infty [\bar{Q}(z', p) + \bar{Q}_1(z', p)] dz'; \quad (36)$$

3 задача – граничное условие (30):

задача (14), (15), (30), (19):

$$\frac{W(z, \tau)}{\beta(\beta+1)^{-1}} = \exp\left[-\frac{\tau + \beta(2\tau - z)}{2(\beta+1)}\right] + \int_z^\tau [\Psi(z', \tau - \beta(z' - z)) + \Psi_1(z', \tau - \beta(z' - z))] \exp[-\beta(z' - z)] dz' \quad (40)$$

где $\Psi(z, \tau)$ и $\Psi_1(z, \tau)$ представлены в (23), (34).

Сравнение полученных аналитических решений с численными конструкциями, принципиально отличным от них показывает, что использование граничных условий интегрального вида при тепловом нагреве и нагреве средой приводит к функциональным конструкциям, принципиально отличным от общеизвестных в многочисленных публикациях. Это обстоятельство следует учитывать при проведении соответствующих численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.
2. Карташов, Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами / Э. М. Карташов // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 2. – С. 171–195.
3. Карташов, Э. М. Краевые задачи для гиперболических моделей переноса / Э. М. Карташов // Вестник МИТХТ. – 2008. – Т. 3, № 3 – С.20–22.
4. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М. : Высшая школа, 2005. – 430 с.