

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЦЕПНЫХ СТРУКТУР ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В.В. Голодная[@], Е.С. Савин

*Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий
им. М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия*

[@] Автор для переписки, e-mail: sonea_g@mail.ru

Рассматривается вопрос о теплопроводности твердого тела в приближении, в котором длина свободного пробега фононов ограничена и не зависит от температуры, так что температурное поведение коэффициента теплопроводности определяется только теплоемкостью. В этих условиях методом разделения переменных решена задача нестационарной теплопроводности цепных структур при низких температурах ($T \ll \theta$, θ – температура Дебая). Рассмотрены решения, относящиеся как к областям с движущимися, так и с фиксированными границами. Специальный выбор закона движения границы позволил свести исходную задачу к задаче с фиксированными границами, но с преобразованным уравнением теплопроводности. Полученные результаты могут быть применены для изучения теплопроводности кристаллического углерода, существующего в форме карбина (синтетической полимерной цепочечной структуры). Найденные решения уравнения нестационарной теплопроводности сильно анизотропных кристаллов могут быть использованы также при изучении теплопроводности в волокнах из плавленого кварца и в высокоориентированных волокнах полиэтилена. Волокна плавленого кварца имеют неупорядоченную атомную структуру, но непрерывающуюся сеть кремний–кислородных связей. Эффективные размеры кристаллитов в таком веществе того же порядка, что и отдельные тетраэдры двуокиси кремния. Можно полагать, что в этом случае длина свободного пробега фононов будет постоянной, ограниченной лишь размерами кристаллитов, и уменьшение коэффициента теплопроводности при понижении температуры обусловлено только уменьшением теплоемкости. Структура полиэтилена, обладающего высокой степенью кристалличности, имеет почти идеальную структуру ламеллярного типа. Границы ламелей рассеивают фононы, причем вероятность рассеяния практически не зависит от длины волны фонона, т.е., в данном случае длина свободного пробега фонона будет постоянной и определяется размерами ламелей, так что теплопроводность будет пропорциональна теплоемкости.

Ключевые слова: *низкие температуры, уравнение нестационарной теплопроводности, цепные структуры.*

NON-STATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY OF CHAIN STRUCTURES AT LOW TEMPERATURES

V.V. Golodnaya[@], E.S. Savin

*Moscow Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies),
Moscow 119571, Russia*

[@] Corresponding author e-mail: sonea_g@mail.ru

The matter of thermal conductivity is considered in an approximation, in which the free length of phonons is limited and doesn't depend on temperature, so that the temperature behavior of thermal conductivity coefficient is only determined by thermal capacity. In these conditions the problem of non-stationary thermal conductivity of chain structures at low temperatures ($T \ll \theta$,

θ for Debye temperature) is solved with the use of the variables separation method. Solutions relating to the areas with both moving and fixed borders are considered. Special choice of border motion law allowed us to bring the initial problem to the problem with fixed borders, but with reformed equation of thermal conductivity. The results obtained can be applied for studying the thermal conductivity of crystal carbon existing in the form of carbide (synthetic polymeric chained structure). The found solutions of the equation of non-stationary thermal conductivity of highly anisotropic crystals can also be used while studying thermal conductivity in melted quartz fibres and highly oriented fibres of polyethylene. Melted quartz fibres have a disordered atomic structure, but with an uninterrupted net of silica-oxygen links. The effective sizes of crystallites in such substance are of the same order as those of separate tetrahedrons of silica dioxide. One may assume that in this case the free length of phonons remains constant, limited only by the size of the crystallites, and the decrease of thermal conductivity coefficient while lowering the temperature is caused only by the decrease of heat capacity. Polyethylene of a higher crystallinity degree has almost the ideal structure of lamellar type. The borders of lamellas scatter phonons, so that the probability of scattering practically doesn't depend on the length of phonon's wave. Thus, in this case the free length of phonons won't remain constant and is determined by the size of lamellas, so that thermal conductivity will be proportional to heat capacity.

Keywords: low temperatures, equation of non-stationary thermal conductivity, chain structures.

Введение

Для однородных твердых тел уравнение нестационарной теплопроводности в одномерном случае имеет следующий вид:

$$C(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad (1)$$

где $C(T)$ – теплоемкость, $\rho(T)$ – плотность, χ – коэффициент теплопроводности [1]. Далее зависимостью $\rho(T)$ от температуры (по сравнению с соответствующей зависимостью $C(T)$ и $\chi(T)$) будем пренебрегать.

Уравнение (1) является нелинейным, и в общем случае его решение связано с большими трудностями. Однако в ряде частных случаев, используя различные приближенные методы, можно получить аналитическое решение задач, описываемых этим уравнением [2,3].

Представляет научный и практический интерес решение уравнение (1) для своеобразных структур (тонкие пленки, тонкие стержни) при низких температурах. Это связано с тем, что из-за дискретности уровней энергии колебаний при таких температурах в тепловых свойствах таких тел играют существенную роль размеры и форма тела [4].

Границей, отделяющей высокие температуры от низких, является температура Дебая θ , определяемая условием $hw_m = k\theta$, где h – постоянная Планка, w_m – максимальная частота колебаний атомов, k – постоянная Больцмана.

В твердых телах переносчиками тепла являются частицы и «квазичастицы»: электроны, фононы, экситоны, магноны и др. Далее будем рассматривать диэлектрики, в которых перенос тепла осуществляется только фононами-квантами поля колебаний атомов.

В этом случае выражение для коэффициента теплопроводности, исходя из кинетической теории газов, можно представить в следующем виде:

$$\chi(T) = \frac{1}{3} C(T)vl(T), \quad (2)$$

где $C(T)$ – теплоемкость фононного газа, v – средняя скорость распространения фононов (скорость звука), $l(T)$ – средняя длина свободного пробега фонона, которая определяется в основном процессами рассеяния фонона на фононах, рассеяния фонона на примесях, дефектах кристаллической решетки, поверхностью образца [5].

При некоторых условиях величина l не зависит от температуры. К примеру, в поликристалле границы зерен рассеивают фононы, причем вероятность рассеяния сложным образом зависит от геометрии, но более или менее не зависит от длины волны фонона [6], в таких твердых телах в широком интервале температур l постоянная и, следовательно, коэффициент теплопроводности пропорционален теплоемкости. Это обстоятельство значительно упрощает уравнение (1) при высоких температурах ($T \gg \theta$), поскольку в этом случае $C = const$ и

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где a – коэффициент температуропроводности [1]. (Заметим, что для монокристаллов $\chi \sim T^1$ [6]).

В области $T \ll \theta$ при понижении температуры длина свободного пробега фонона, связанная с фонон-фононным взаимодействием, вскоре становится сравнимой со средней длиной свободного пробега при рассеивании фононов на дефектах решетки

и примесях или с длиной свободного пробега, характеризующей рассеяние фононов поверхностью конечного образца. Когда это происходит, длина свободного пробега в формуле (2) перестает быть величиной, определяемой только фонон-фононным взаимодействием, и ее следует заменить температурно-независимой длиной пробега, определяемой пространственным распределением дефектов или же размерами образца.

В настоящей работе, полагая независимость l от температуры, рассматривается вопрос о нестационарной теплопроводности цепных структур при низких температурах ($T \ll \theta$). Под цепной структурой понимаем структуру кристалла, который может быть представлен как состоящий из слабо взаимодействующих параллельных линейных цепочек. Если взаимодействие между атомами вдоль отдельной цепочки значительно превосходит взаимодействие между ними в соседних цепочках, то динамика такого кристалла имеет особенности по сравнению с кристаллами без сильной анизотропии во взаимодействии атомов. Сильная анизотропия кристалла цепной структуры, обуславливающая необычные законы дисперсии колебаний атомов цепей, приводит к выделению нескольких интервалов температур со специфическими температурными зависимостями теплоемкости.

Согласно [7], в температурной области $\theta(\alpha/\beta)^{1/2} \ll T \ll \theta$ учет волн изгиба приводит в приближении невзаимодействующих цепей к закону $C \sim T^{1/2}$. При более низких температурах, когда существенен учет взаимодействия между цепями, теплоемкость $C \sim T^{5/2}$ при $\theta(\mu/\beta) \ll T \ll \theta(\mu/\beta)^{1/2}$ при ($\mu \ll \beta$) и $C \sim T^3$ при $T \ll \theta\mu/\beta$ (α, β, μ - модули упругости).

Далее рассмотрим два случая – нестационарную теплопроводность цепных структур в условиях с фиксированными и подвижными границами.

Результаты и их обсуждение

1. Фиксированные границы

Заметим, что во всех температурных интервалах, обусловленных различным характером дисперсии изгибных колебаний, зависимость теплоемкости носит степенной характер. Поэтому можно решить поставленную задачу в общем виде. Пусть $C \sim T^{\alpha}$ и, соответственно, $\chi \sim T^{\alpha}$ (для нашего случая $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3$).

Уравнение теплопроводности будет иметь следующий вид:

$$AT^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где A – постоянная. Пусть граничные условия имеют следующий вид:

$$T(0, t) = 0, \quad T(a_0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq a_0 \quad (4)$$

В начальный момент $t = 0$ дано распределение температуры в области $0 \leq x \leq a_0$, описываемое функцией $f_0(x)$, а именно,

$$T(x, 0) = f_0(x). \quad (5)$$

В связи с граничными условиями необходимо предположить выполнение условия $f_0(0) = f_0(a_0) = 0$.

Частные решения уравнения (3) будем искать в виде произведения двух функций: $T(x, t) = F(x)G(t)$. Тогда выражение (3) преобразуется к следующему выражению:

$$\frac{A}{G} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{a}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (6)$$

При этом граничные условия принимают вид

$$F(x=0), F(x=a_0) = 0. \quad (7)$$

Если постоянное значение отношений в (6) положить равным $-\gamma^2$, то уравнение (6) разобьется на два следующих уравнения:

$$\frac{A}{G} \frac{dG}{dt} = -\gamma^2,$$

(его решением является функция $G(t) = Be^{-\frac{\gamma^2 t}{A}}$ (8)), и уравнение

$$F \frac{d^2 F}{dx^2} + \alpha \left(\frac{dF}{dx} \right)^2 + \gamma^2 F^2 = 0. \quad (9)$$

Полагая в этом выражении $F(x) = u^{\frac{1}{\alpha+1}}(x)$, получаем линейное уравнение вида:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma^2(\alpha+1)u = 0.$$

Решением этого уравнения является функция $u(x) = C \cos \sqrt{\alpha+1} \gamma x + D \sin \sqrt{\alpha+1} \gamma x$.

Учитывая граничные условия $u(0) = u(a_0) = 0$, получаем

$$C = 0, \quad \sqrt{\alpha+1} \gamma a_0 = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

так что параметр γ может принимать лишь значения

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} \frac{\pi n}{a_0}.$$

Полагая $BD^{\frac{1}{\alpha+1}} = a_n$ при $\gamma = \gamma_n$, приходим к такой последовательности частных решений:

$$T_n(x, t) = a_n e^{-\frac{\gamma_n^2 t}{A}} \left(\sin \frac{\pi n x}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Общее решение будем искать в виде ряда

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{\pi n x}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m(n) \sin \frac{\pi m x}{a_0}, \quad b_m(n) = \frac{2}{a_0} \int_0^{a_0} \left(\sin \frac{\pi n x}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \sin \frac{\pi m x}{a_0} dx, \\ f_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{a_0}, \quad C_n = \frac{2}{a_0} \int_0^{a_0} f_0(x) \sin \frac{\pi n x}{a_0} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (11) с учетом выражений (12) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{m=1}^{\infty} b_m(n) \sin \frac{\pi m x}{a_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{a_0}. \quad (13)$$

Умножая слева и справа (13) на $\sin \frac{\pi k x}{a_0}$ ($k = 1, 2, \dots$)

и интегрируя по x от 0 до a_0 , получаем систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_k(n) = C_k. \quad (14)$$

2. Движущиеся границы

Существуют различные методы решения краевых задач теплопроводности в области с произвольно движущейся границей [8–10]. Для решения нашей задачи используем функциональное преобразование специального вида, основанное на введении подвижной системы координат, в которой подвижная граница становится неподвижной. При этом исходное уравнение теплопроводности приводится к виду, допускающему применение классического метода разделения переменных [1].

Как и в первом случае, полагаем температурную зависимость теплоемкости $C \sim T^\alpha$, α – параметр, имеющий различное значение в разных частях температурного интервала $0 \leq T \leq \theta$ [7]. Также полагаем, что температурное поведение коэффициента теплопроводности определяется только теплоемкостью, $\chi \sim T^\alpha$. В этих условиях уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\gamma_n^2 t}{A}} \left(\sin \frac{\pi n x}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (10)$$

коэффициенты которого a_n находятся из начального условия, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sin \frac{\pi n x}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = f_0(x), \quad 0 \leq x \leq a_0. \quad (11)$$

Разложим функции, входящие в это уравнение, в ряд Фурье по синусам. Имеем:

а граничные условия таковы:

$$T(0, t) = 0, \quad T(a, t) = T_0,$$

где по условию $a = a(t) = a_0 f(t)$, $f(t)$ – заданная функция времени.

Начальное условие выберем в виде

$$T(x, 0) = f_0(x).$$

Введя новую переменную $y = \frac{x}{f(t)}$, преобразуем (15) к виду

$$A \left[f^2 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{y}{2} \frac{d}{dt} f^2 \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{\alpha}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (16)$$

Функция $T(y, t)$ удовлетворяет граничным условиям на неподвижных границах:

$$T(0, t) = 0, \quad T(a_0, t) = T_0, \quad T(y, 0) = f_0(y).$$

Далее, вводя новую переменную $\tau = \int_c^t \frac{dt}{f^2(t)}$, где C – постоянная, а также полагая $f(t) \equiv \varphi(\tau)$, имеем

$$A \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \varphi(\tau) y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\alpha}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (17)$$

Точное решение уравнения (17) для произвольного вида $f(t)$ невозможно. Приближенное решение может быть найдено, в частности, по теории возмущений в случае, если $f(t)$ слабо зависит от времени.

Из выражений (16) и (17) следует, что при специальном выборе $f(t)$, а именно, если f^2 линейно зависит от времени, переменные y и t разделяются. Такой функцией, в частности, является функция вида

$$f(t) = \sqrt{1 + \frac{t}{t_0}}, \quad (18)$$

где t_0 – произвольная постоянная. Функция $f(t)$ удовлетворяет начальному условию $f(0)=1$, т.е. $a(0)=a_0$.

Подставляя (18) в (16) и изменяя начало отсчета времени при помощи замены $t+t_0=\tau$, получаем:

$$A \left[\frac{\tau}{t_0} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{y}{2t_0} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{\alpha}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (19)$$

Представим функцию $T(y, \tau)$ в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая – от координаты:

$$T(y, \tau) = G(\tau)F(y). \quad (20)$$

В уравнении (19) с функцией $T(y, \tau)$ вида (20) переменные разделяются, и мы получаем два уравнения для нахождения $F(y)$ и $G(\tau)$

$$A \frac{\tau}{t_0} \frac{1}{G} \frac{dG}{d\tau} = -\gamma^2, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{\alpha}{F} \left(\frac{dF}{dy} \right)^2 + \frac{A}{2t_0} y \frac{dF}{dy} = -\gamma^2 F. \quad (22)$$

Решением временного уравнения (21) является функция

$$G(\tau) = C_1(\tau)^{-\frac{\gamma^2 t_0}{A}}. \quad (23)$$

Уравнение (22) после введения новой переменной $F = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$ становится линейным:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{A}{2t_0} y \frac{du}{dy} + (\alpha+1)\gamma^2 u = 0. \quad (24)$$

Введение переменных $u = \varphi \exp(-t)$, $y = \left(\frac{4t_0 t}{A} \right)^{1/2}$

приводит уравнение (24) к стандартному виду вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$t \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - t \right) \frac{d\varphi}{dt} - \left[\frac{1}{2} - \frac{t_0}{A} (\alpha+1)\gamma^2 \right] \varphi = 0. \quad (25)$$

Согласно [11], его решением является функция

$$\varphi(t) = C_2 \phi \left(a_1, \frac{1}{2}; t \right) + C_3 t^{1/2} \phi \left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t \right),$$

где C_2, C_3 – постоянные, $\phi(a, b, c)$ – вырожденная

гипергеометрическая функция,

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{t_0}{A} (\alpha+1)\gamma^2.$$

Для функции $u(y)$ получаем $\left(k = \frac{A}{4t_0} \right)$:

$$u(y) = e^{-ky^2} \left[C_2 \phi \left(a_1, \frac{1}{2}; ky^2 \right) + C_3 \sqrt{k} \phi \left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; ky^2 \right) \right].$$

Используя граничное условие $F(x=0)=0$, так что $u(y=0)=0$, получаем $C_2=0$, и это выражение принимает следующий вид:

$$u = C_3 \sqrt{k} y e^{-ky^2} \phi \left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; ky^2 \right).$$

Коэффициент C_3 находится из второго граничного условия ($u(a_0)=T_0$):

$$C_3^{-1} = \frac{\sqrt{k} a_0}{T_0} e^{-ka_0^2} \phi \left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; ka_0^2 \right).$$

Поскольку функция $T(x, t)$, являющаяся решением уравнения (15), должна быть ограниченной функцией для любых значений координат x ($0 \leq x \leq a(t)$), то и функция $u(y)$ должна быть ограниченной при всех значениях координат y ($0 \leq y \leq a_0$). Для этого необходимо, чтобы вырожденная гипергеометрическая функция $\phi(a, b, c)$ была полиномом степени $|a|$. Это будет выполняться, если значения первого аргумента a функции $\phi(a, b, c)$ отрицательные числа (или нуль). Таким образом, должно выполняться следующее условие:

$$a_1 + \frac{1}{2} = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Учитывая явный вид a_1 получаем

$$\gamma = \gamma_n = \sqrt{\frac{A(n+1)}{t_0(\alpha+1)}},$$

и, следовательно,

$$u_n(y) = C_3 \sqrt{k} y e^{-ky^2} \phi \left(-n, \frac{3}{2}; ky^2 \right). \quad (26)$$

Выражение (26) удобно представить через более простую функцию – полином Эрмита [12]:

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2z \phi \left(-n, \frac{3}{2}; z^2 \right).$$

Для координатной функции получаем

$$F_n^{\alpha+1}(y) = C_3 \left[\frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} \right] e^{-ky^2} H_{2n+1}(\sqrt{k}y). \quad (27)$$

Для полной функции $T(y, \tau)$, являющейся суперпозицией частных решений (23) и (27), находим, что

$$T(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\tau) \frac{\gamma_n^2 t_0}{A} \left[e^{-ky^2} H_{2n+1}(\sqrt{k}y) \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (28)$$

$$\text{где } C_n = C_1 \left[\frac{(-1)^n n! C_3}{2(2n+1)!} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Коэффициенты C_n находятся из начального условия ($T(y, \tau = 0) = f_0(y)$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n t_0 \frac{\gamma_n^2}{A} \left[e^{-ky^2} H_{2n+1}(\sqrt{k}y) \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} = f_0(y). \quad (29)$$

Разложим функции, входящие в уравнение (29), в ряд Фурье по синусам. Имеем:

$$\left[e^{-ky^2} H_{2n+1}(\sqrt{k}y) \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(n) \sin \frac{\pi m y}{a_0},$$

$$b_m(n) = \frac{2}{a_0} \int_0^{a_0} \left[e^{-ky^2} H_{2n+1}(\sqrt{k}y) \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \sin \frac{\pi m y}{a_0} dy,$$

$$f_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n y}{a_0}, \quad C_n = \frac{2}{a_0} \int_0^{a_0} f_0(y) \sin \frac{\pi n y}{a_0} dy.$$

Список литературы:

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. М.: Химия, 1993. 208 с.
3. Кудинов В.А., Карташов Э.М. [и др.] Тепло-массоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. 426 с.
4. Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М.: Мир, 1965. 384 с.
5. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. М.: Мир, 1979. Т.2. 486 с.
6. Займан Дж. Электроны и фононы. М.: Иностранная литература, 1962. 488 с.
7. Лифшиц И.М. О тепловых свойствах цепных и слоистых структур при низких температурах // ЖЭТФ. 1952. Т. 22. № 4. С. 475–486.
8. Гринберг Г.А., Косс В.А. О некоторых точных решениях уравнения Фурье, для-изменяющихся

Далее, поступив так же, как и в первом случае, для нахождения коэффициентов a_n получаем систему алгебраических уравнений вида (14).

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы также при изучении нестационарной теплопроводности в волокнах из плавленого кварца и в высокоориентированных волокнах полиэтилена. Волокна плавленого кварца имеют неупорядоченную атомную структуру, но непрерывающуюся сеть кремний–кислородных связей. Эффективные размеры кристаллов в таком веществе того же порядка, что и отдельные тетраэдры двуокиси кремния. Можно полагать, что в этом случае длина свободного пробега фононов будет постоянной, ограниченной лишь размерами кристаллитов, и уменьшение коэффициента теплопроводности при понижении температуры обусловлено только уменьшением теплоемкости. Структура полиэтилена, обладающего высокой степенью кристалличности, имеет почти идеальную структуру ламеллярного типа. Границы ламелей рассеивают фононы, причем вероятность рассеяния практически не зависит от длины фонона, т.е. в данном случае длина свободного пробега фонона будет постоянной и определяется размерами ламелей. Следовательно, теплопроводность будет пропорциональна теплоемкости.

References:

1. Kartashov E.M. Analiticheskie metodi v teorii teploprovodnosti tvyordikh tel [Analytical methods in theory of thermal conductivity of solids]. M.: Visshaya shkola Publ., 2001. 550 p. (in Russ.).
2. Rudobashta S.P., Kartashov E.M. Diffuziya v khimiko-tekhnologicheskikh protsessakh [Diffusion in chemical-technological processes]. M.: Khimiya Publ., 1993. 208 p. (in Russ.).
3. Kudinov V.A., Kartashov E.M. [et al.] Teplomassoperenos i termouprugost' v mnogoslonykh protsessakh [Heatmasstransfer and thermal elasticity in multilayer constructions]. M.: Energoatomoizdat Publ., 1997. 426 p. (in Russ.).
4. Maradudin A., Montroll E., Veiss Dzh. Dinamicheskaya teoriya kristallicheskoj reshotki v garmonicheskom priblizhenii [Dynamical theory of crystal structure in harmonical approach]. M.: Mir Publ., 1965. 384 p. (in Russ.).
5. Ashcroft N., Mermin N. Fizika tvyordogo tela [Physics of solids]. M.: Mir Publ., 1979. V. 2. 486 p. (in Russ.).

со временем областей // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35. № 3. С. 759–760.

9. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Известия РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.

10. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.

Kartashov E.M. Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries // Engineering Physics and Thermophysics. 2001. V. 74. № 2. P. 498–536.

11. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

12. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. 359 с.

6. Zaiman Dzh. Elektroni i fononi [Electrons and phonons]. M.: Innostrannaya literatura, 1962. 488 p. (in Russ.).

7. Lifshits I.M. About of thermal property chain and layer structures at low temperatures // ZhETF [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1952. V. 22. № 4. P. 475–486. (in Russ.).

8. Grinberg G.A. Koss V.A. About of some exact solutions equation Fourier for change with time regions // Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1971. V. 35. № 3. P. 759–760. (in Russ.).

9. Kartashov E.M. Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries // Izvestiya RAN. Energetika [«Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering» Journal]. 1999. № 5. P. 3–34. (in Russ.).

10. Kartashov E.M. Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2001. V. 74. № 2. P. 498–536.

11. Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Obiknovennie differentsial'nie uravneniya [Ordinary Differential Equations]. M.: FIZMATLIT, 2001. 576 p. (in Russ.).

12. Lebedev N.N. Spetsial'nie funktsii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications]. M.: FIZMATLIT, 1963. 359 p. (in Russ.).

Об авторах:

Голодная Валерия Валерьевна, студент Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

Савин Евгений Степанович, кандадат физико-математических наук, заведующий лабораторией кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).