ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Э.М. Карташов, заведующий кафедрой

кафедра Высшей и прикладной математики МИТХТ им. М.В. Ломоносова

e-mail: kartashav@mitht.ru

В

статье приводятся основные принципы термоупругости, вытекающие из основных уравнений в динамической постановке
The paper discusses basic principals of thermoelasticity, which derived from the key equations in dynamic approximation.

Ключевые слова: термоупругость, динамическая постановка, первые вариации, принцип Даламбера, принцип Гамильтона, принцип Дирихле.

Key words: thermoelasticity, first variations, dynamic posing, D'alambert principle, Hamilton principle, Dirichlet principle.

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\mathbf{n}^w$ – внешняя нормаль к S ; $\Omega = (M \in D, t > 0)$ – цилиндрическая область в фазовом пространстве (x, y, z, t) с основанием D при $t = 0$. Пусть $\sigma_{ik}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$ ($i = x, y, z$) – соответственно, компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие в Ω основным уравнениям термомеханики [1]: уравнениям движения, геометрическим соотношениям и физическим уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial k} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad (i, k = x, y, z), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial k} + \frac{\partial U_k}{\partial i} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda e \delta_{ik} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T \delta_{ik}. \quad (3)$$

Здесь: ρ – плотность; $\mu = G$, $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ – изотермические коэффициенты Ламе, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, δ_{ik} – символ Кро-

некера; $e = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ – объемная деформация, связанная с объемным растяжением $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ соотношением

$$\sigma = (3\lambda + 2\mu)(e - 3\alpha_T T); \quad (4)$$

$T = T(M, t)$ – температурная функция в Ω , которая может быть найдена как решение соответствующей краевой задачи нестационарной теплопроводности для уравнения параболического или гиперболического типов; считается, что значение $T = 0$ соответствует исходному недеформированному и ненапряженному состоянию области (при отсутствии внешних сил). В момент времени $t > 0$ упругое тело (область D) находится в деформированном состоянии, характеризуемом перемещениями $U_i(M, t)$ ($i = x, y, z$). Сообщим телу при неизменных значениях времени и температуры виртуальные перемещения δU_i , выводящие его из этого мгновенного состояния таким образом, чтобы новое состояние было геометрически возможным, то есть совместимым со сплошностью тела и с условиями закрепления. Умножим каждое из уравнений (1) соответственно на δU_x , δU_y , δU_z , сложим и проинтегрируем по всему объему тела. Получим:

$$\int_V \left(\sum_i \sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial k} \delta U_i - \rho \sum_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \delta U_i \right) dV = 0, \quad (i, k = x, y, z). \quad (5)$$

Преобразуем первое слагаемое в (5), используя формулу Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \mathbf{n} d\sigma:$$

$$\int_V \left(\sum_i \sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial k} \delta U_i \right) dV = \sum_i \int_V \sum_k \frac{\partial}{\partial k} (\sigma_{ki} \delta U_i) dV - \sum_i \int_V \sum_k \sigma_{ki} \frac{\partial (\delta U_i)}{\partial k} dV = \int_S \left(\sum_i \sum_k \sigma_{ki} n_k \delta U_i \right) d\sigma -$$

$$\int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ki} \frac{\partial (\delta U_i)}{\partial k} dV. \quad (6)$$

Пусть на поверхности S области D заданы граничные условия

$$\sum_k \sigma_{ki} n_k = p_i \quad (i, k = x, y, z). \quad (7)$$

Тогда входящее в (6) выражение

$$\int_S \left(\sum_i \sum_k \sigma_{ki} n_k \delta U_i \right) d\sigma = \int_S \sum_i p_i \delta U_i d\sigma = \delta A \quad (8)$$

представляет собой виртуальную работу,

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} + \gamma_{xy} \sigma_{xy} + \gamma_{yz} \sigma_{yz} + \gamma_{zx} \sigma_{zx}) - \frac{\alpha_T T}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \quad (9)$$

где σ_{ik} , ε_{ik} – соответственно, напряжения и деформации в теле. Эти величины связаны

$$W = \frac{\lambda}{2} e^2 + \mu (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T e + 3/2 \cdot (3\lambda + 2\mu) (\alpha_T T)^2. \quad (10)$$

Раскрывая далее коэффициенты Ламе (через упругие постоянные), учитывая, что $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$

$$W = G \left[\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) \right] + \frac{\nu}{1-2\nu} e^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T T e. \quad (11)$$

Из (11) вытекает важное соотношение $\sigma_{ik} = \partial W / \partial \varepsilon_{ik}$, которое проверяется непосредственно с использованием закона Гука (3). Полная энергия деформации (упругая потенциальная энергия)

$$U = \int_V W dV. \quad (12)$$

При этом на основании правил вариационного исчисления [2] получаем:

$$\delta U = \sum_i \sum_k \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} = \int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV. \quad (13)$$

С помощью соотношения (2), записанного по правилам вариационного исчисления в виде $2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial}{\partial k} (\delta U_i) + \frac{\partial}{\partial i} (\delta U_k)$, выражение (13) можно преобразовать. Получим:

$$\delta U = \int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ik} \frac{\partial (\delta U_i)}{\partial k} dV. \quad (14)$$

Таким образом, все преобразования в (5)-(6) выполнены, и соотношению (5) можно придать следующую форму

$$\delta A - \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \delta U_i dV = \delta U, \quad (i = x, y, z). \quad (15)$$

Мы получили, таким образом, принцип Даламбера [3]: при виртуальном перемещении тела из некоторого мгновенного состояния работа, совершаемая внешними силами и силами инерции, равна изменению энергии деформации. Следует подчеркнуть, что при виртуальных перемещениях распределение температуры $T(M, t)$ в Ω остаётся неизменным, поэтому варьирование осуществляется изотермически.

Принцип Даламбера в статическом (и квазистатическом) случае (соотношения (1) заменяются уравнениями равновесия при $\rho = 0$) переходит в принцип виртуальных пере-

совершаемую внешними поверхностными нагрузками на виртуальных перемещениях. Для дальнейшего преобразования выражения (6) запишем энергию деформации единицы объёма W тела (совершенную работу нагрузками (7) и температурными напряжениями при наличии в области D $grad T(M, t) \neq 0$) при помощи соотношения

обобщённым законом Гука (3) и соотношением (4). Преобразуя (9) с помощью (3)-(4), находим:

($i \neq j, i, j = x, y, z$) и пренебрегая квадратом температурной функции, находим:

мещений $\delta A = \delta U$ и является, таким образом, его обобщением. Следует также отметить, что функция состояния U в (12) отнюдь не всегда идентична работе деформации, накопленной телом в действительности (эта функция с точностью до аддитивного температурного члена представляет собой свободную энергию тела [3]). Последняя не является функцией состояния и зависит от последовательности приложения нагрузок и изменений температуры.

Соотношение (15) представляет интерес также и потому, что из него можно вывести непосредственно ещё один принцип, а именно принцип Гамильтона [3].

Для этого вместо отдельного мгновенного состояния тела рассмотрим далее непрерывную последовательность таких состояний на временном интервале $[0, t]$. При помощи вариаций δU_i образуем из этих состояний последовательность близких состояний, потребовав, чтобы в начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала времени вариационное состояние совпадало с действительным

$$\delta U_i|_0^t = 0 \quad (16)$$

Так как соотношение (15) справедливо для каждого момента этого интервала времени, то, интегрируя (15) по указанному интервалу, получим:

$$\int_0^t \delta A d\tau - \int_0^t d\tau \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2} \delta U_i dV = \int_0^t \delta U d\tau. \quad (17)$$

Запишем кинетическую энергию тела

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \sum_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dV \quad (18)$$

и вычислим первую вариацию K :

$$\delta K = \int_V \rho \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial(\delta U_i)}{\partial t} dV = \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial t} \delta U_i \right) dV - \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \delta U_i dV. \quad (19)$$

Проинтегрируем (19) по интервалу $[0, t]$, учитывая (16):

$$\int_0^t \delta K d\tau = - \int_0^t d\tau \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2} \delta U_i dV. \quad (20)$$

Соотношение (17) с учётом (20) теперь примет вид

$$\delta \int_0^t (U - K) d\tau = \int_0^t \delta A d\tau. \quad (21)$$

Здесь символ варьирования слева вынесен за знак интеграла, поскольку U и K являются функциями состояния, которые определяются только мгновенным состоянием тела и не зависят от того, каким образом это состояние достигнуто.

Будем считать, что кроме поверхностных сил в (7) на тело (область D) в целом действуют внешние силы. Если эти силы консервативны, то они имеют потенциал $\varphi: \varphi = \varphi(U_x, U_y, U_z)$ и

$$\delta \varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} \delta U_i. \quad (22)$$

При этом потенциальная энергия в любой точке силового поля в области D (то есть работа на виртуальных перемещениях) равна значению потенциала φ , взятому с обратным знаком [4]; в этом случае $\delta A = -\delta \varphi$ и

$$\delta A = - \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} \delta U_i = -\delta \varphi. \quad (23)$$

Объединим потенциал U внутренних сил и потенциал φ внешних сил в суммарный потенциал

$$\Pi = U + \varphi. \quad (24)$$

Тогда соотношение (21) можно представить в виде

$$\delta \int_0^t (\Pi - K) d\tau = 0, \quad (25)$$

что является обычной формулировкой принципа Гамильтона.

В статическом и квазистатическом случаях уравнение (15) переходит в уравнение (16); соответственно принцип Гамильтона переходит в принцип минимума потенциальной энергии – принцип Дирихле

$$\delta \Pi = 0, \quad (26)$$

согласно которому из всех геометрически возможных (устойчивых) положений в действительности реализуется то, которому отвечает минимум потенциальной энергии. Наличие в этом случае минимума следует из рассмотрения второй вариации, которая оказывается положительной [5].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Карташов, Э. М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара / Э. М. Карташов // Итоги науки и техники. Серия Механика деформируемого твердого тела. – 1991. – Т. 22. С. 55–127.
2. Лейбензон, Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости / Л. С. Лейбензон. – М.-Л. : ОГИЗ, 1943. – 228 с.
3. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М. : Физматиз, 1963. – 252 с.
4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1967. – 480 с.
5. Треффц, Е. Математическая теория упругости / Е. Треффц. – М. : ОНТЦ, 1934. – 320 с.